ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Καθ. Π. Κάπρος
ΕΜΠ 2003

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Η Οικονομία
2. Μέτρηση των Αγαθών
3. Ο Χώρος των Αγαθών
4. Συμπεριφορές και Ισορροπία

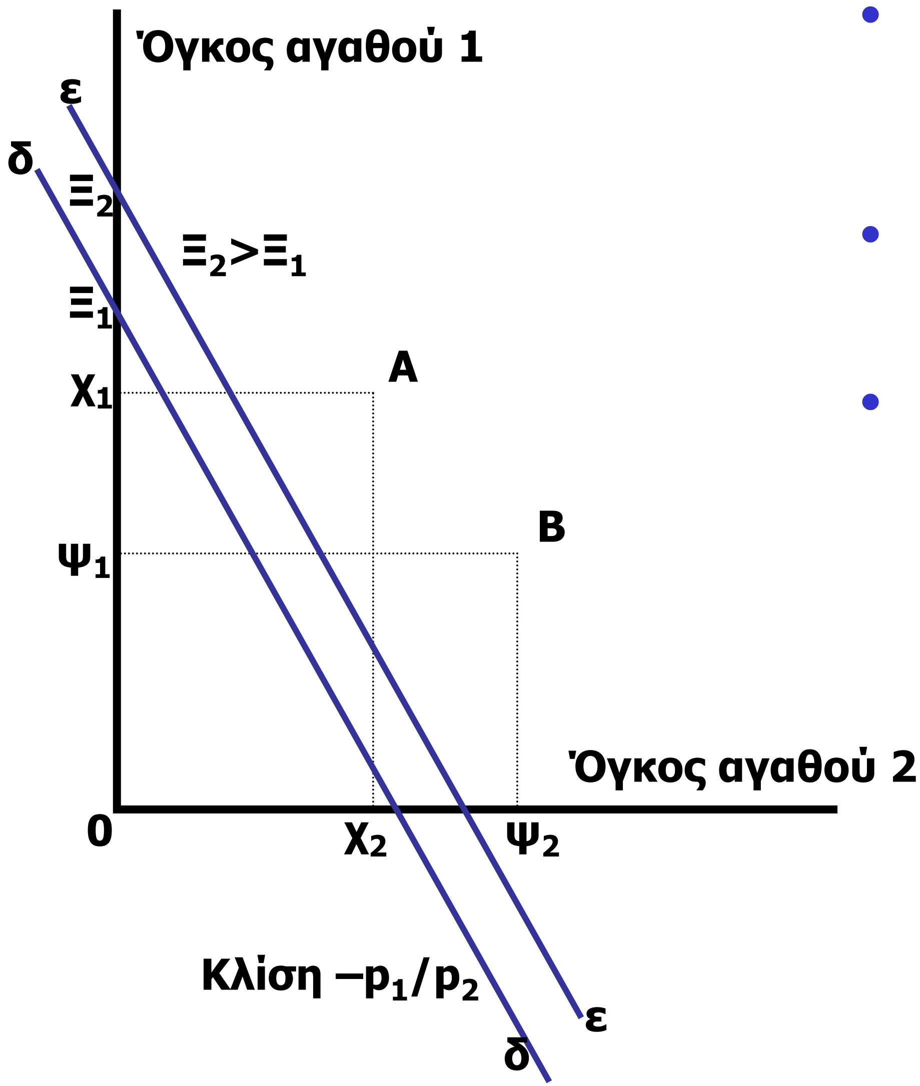
1. Η Οικονομία

- Αγαθά, ν = 1, ..., Ν
- Συμμετέχοντες
  - Καταναλωτές, κ = 1, ..., Κ
    - Αγοράζουν τα αγαθά καταβάλλοντας τίμημα
    - Προσφέρουν την εργασία τους για την οποία αμείβονται
    - Τα αγαθά που αγοράζουν τα καταναλώνουν
  - Παραγωγοί ή επιχειρήσεις, μ = 1, ..., Μ
    - Προσφέρουν τα αγαθά έναντι τιμήματος
    - Αγοράζουν εργασία και αγαθά από άλλους παραγωγούς
    - Τα αγαθά που αγοράζουν τα μεταποιούν σε αυτά που πωλούν
- Κάθε συμμετέχων αποφασίζει αυτόνομα μεγιστοποιώντας ατομικά το δικό του στόχο

2. Μέτρηση των Αγαθών

- Όγκος (volume) αγαθού: χ_ν σε φυσικές μονάδες
  - $\chi_\nu + \psi_\nu$ επιτρέπεται, αλλά $\chi_\nu + \psi_\mu$ δεν επιτρέπεται
- Αξία απόκτησης αγαθού: Ξ_ν σε νομισματικές μονάδες, $\Xi_\nu = \chi_\nu \cdot p_\nu$
- Τιμή αγαθού: p_ν αξία ανά μονάδα όγκου (σε νομισματικές μονάδες ανά φυσική μονάδα)
- Καλάθι αγαθών: $X = \{\chi_\nu ; \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}\}$ νι-άδα όγκων από διαφορετικά αγαθά
- Δαπάνη απόκτησης καλαθιού: $\Xi = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \chi_\nu \cdot p_\nu$

3. Ο χώρος των αγαθών



- Χώρος αγαθών είναι το σύνολο των νιάδων όγκων (καλαθιών) για το αγαθό (όπως τα σημεία A και B στο σχήμα).
- Η δαπάνη είναι απεικόνιση του χώρου των αγαθών σε μία διάσταση (αυτή των πραγματικών αριθμών).
- Ισο-δάπανη ευθεία είναι ο γεωμετρικός τόπος των καλαθιών αγαθών η αγορά των οποίων επιφέρει ίση δαπάνη (ευθείες δδ, εε στο σχήμα).
    - Η κλίση ισο-δάπανης ευθείας είναι αρνητική, με κλίση το λόγο των τιμών των αγαθών. Η δαπάνη αυξάνεται όταν η ισο-δάπανη ευθεία μετακινείται παράλληλα προς τα πάνω και δεξιά.
    - Αν p2 ίση με ένα, η δδ τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο Ξ ίσο με τη δαπάνη που αντιστοιχεί στην ισο-δάπανη ευθεία δδ

4. Συμπεριφορές και Ισορροπία

- Συμπεριφορά: με βάση την ατομική του απόφαση κάθε συμμετέχων προσδιορίζει τους όγκους των αγαθών που αγοράζει ή πωλεί.
- Ζήτηση: η συμπεριφορά ως προς την αγορά.
- Προσφορά: η συμπεριφορά ως προς την πώληση.
- Ισορροπία: όταν κατά την αγορά και πώληση αγαθού, ο όγκος που αγοράζεται ισούται με τον όγκο που πωλείται και η δαπάνη αγοράς ισούται με την είσπραξη από την πώληση.
  - Ένα αγαθό ζητείται από τους καταναλωτές ή/και τους παραγωγούς, και προσφέρεται από άλλους παραγωγούς.
  - Η εργασία προσφέρεται από τους καταναλωτές και ζητείται από τους παραγωγούς
  - Η οικονομία είναι σε ισορροπία όταν, παρά τον ατομικό χαρακτήρα των συμπεριφορών των συμμετεχόντων, οι αγορές-πωλήσεις για όλα τα αγαθά και την εργασία είναι όλες σε ισορροπία.

Β. ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ

1. Σύστημα Προτιμήσεων
2. Αξιώματα για τις Προτιμήσεις
3. Η Χρησιμότητα
4. Η Συνάρτηση Χρησιμότητας
5. Η έννοια της Υποκατάστασης
6. Η Καμπύλη Αδιαφορίας
7. Ο Βαθμός Υποκατάστασης των Αγαθών

1. Σύστημα Προτιμήσεων

- Ο αποφασίζων (π.χ. καταναλωτής) γνωρίζει αν προτιμά ένα καλάθι Α από ένα άλλο καλάθι Β, τα οποία περιλαμβάνουν ποσότητες από Ν αγαθά. Ξέρει να δηλώσει αν προτιμά το Α από το Β, ή το Β από το Α, ή είναι αδιάφορος μεταξύ των Α και Β.
- Αν για κάθε αγαθό λαμβάνοντάς το χωριστά, ο αποφασίζων προτιμά μεγαλύτερη παρά μικρότερη ποσότητα και αν οι ποσότητες του Β είναι ίσες ή μεγαλύτερες των ποσοτήτων του Α για κάθε αγαθό, τότε σίγουρα προτιμά το καλάθι Β από το καλάθι Α.
- Αν το Α ταυτίζεται με το Β τότε είναι αδιάφορος μεταξύ Α και Β.
- Η πραγματικότητα είναι πιο πολύπλοκη από τα αξιώματα που θα δεχθούμε για το υποκειμενικό σύστημα προτιμήσεων:
  - Για ένα συγκεκριμένο αγαθό, πάντα προτιμά μεγαλύτερη παρά μικρότερη ποσότητα;
  - Όταν έχει να διαλέξει μεταξύ Α και Β πάντα ξέρει τι να κάνει;
  - Αν προτιμά το Α από το Β και επίσης προτιμά το Β από το Γ, τότε προκύπτει ότι προτιμά το Α από το καλάθι Γ;

2. Αξιώματα για τις Προτιμήσεις

Σύστημα Προτιμήσεων

Αντικείμενα

$$A = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \left(X \subseteq \Re^n\right)$$

Σχέσεις

$A \succ B$ Προτίμηση του A από το B

$A \approx B$ Αδιαφορία μεταξύ A και B

Αξιώματα

Πληρότης : Για κάθε Α και Β, μία από τις παρακάτω είναι αληθής :

$$A \succ B \text{ ή } B \succ A \text{ ή } A \approx B$$

Ανακλαστικότητα : $A \approx A$ αληθής

Μεταβατικότητα : Αν $A \succ B$ και $B \succ C$ τότε $A \succ C$

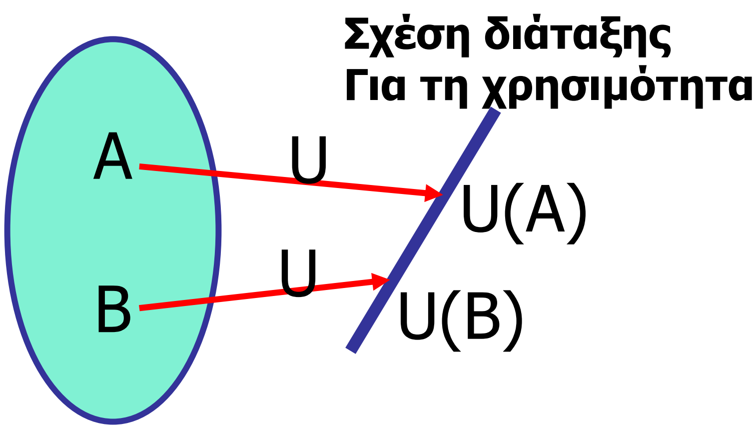
Μονοτονία : Αν $\left(x_i > y_i \Rightarrow x_i \succ y_i \,, \forall i\right)$ και

$\left(x_i = y_i \Rightarrow x_i \approx y_i \,, \forall i\right)$ τότε

$$A \succ B \text{ αν } \left(x_i \geq y_i, \forall i\right) \text{ όπου } A = \left(x_i, \forall i\right) \text{ και } B = \left(y_i, \forall i\right)$$

3. Η Χρησιμότητα

- Χρησιμότητα ή ωφέλεια είναι το κριτήριο με το οποίο ο αποφασίζων κρίνει ότι προτιμά το καλάθι Α από το καλάθι Β
- Η Χρησιμότητα είναι επομένως μία απεικόνιση από το χώρο των αγαθών (τις νι-άδες) σε μία διάσταση στην οποία ορίζεται μία σχέση διάταξης κατά την οποία ο αποφασίζων τεκμαίρει ποιο καλάθι προτιμά συγκρίνοντας ως προς τη διάταξη αυτή την τιμή που λαμβάνει η χρησιμότητα για κάθε καλάθι.



Καλάθια Αγαθών

$U(X)$ απεικόνιση

$$(x_1,\dots,x_n)\in\left(X\subseteq\Re^n\right)\xrightarrow{U(X)}u\in\left(\overline{U}\subseteq\Re\right)$$

$U(X)$ συνάρτηση

$$u=U(x_1,\dots,x_n)$$

Προτιμήσεις και Χρησιμότητα

$$u_A>u_B\Rightarrow A\succ B \;\text{ και }\; u_A=u_B\Rightarrow A\approx B$$

όπου $A=(x_1,\dots,x_n), B=(y_1,\dots,y_n)$

$$u_A=U(x_1,\dots,x_n), u_B=U(y_1,\dots,y_n)$$

4. Η συνάρτηση Χρησιμότητας

- Αξιώματα (που δεν είναι απαραίτητα παρά μόνο για τους οικονομικούς υπολογισμούς, όχι για τη θεωρία)
  - Το σύνολο των δυνατών καλαθιών Χ είναι κυρτό και απεριόριστο ως προς τις θετικές ποσότητες των αγαθών
  - Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι συνεχής και μονότονα αύξουσα
  - Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι δυο φορές διαφορίσιμη
  - Η συνάρτηση χρησιμότητας δεν είναι κυρτή

$$\text{Αν } \left(x_i, \forall i\right) \in X \text{ και } \left(y_i \geq x_i, \forall i\right) \text{ τότε } \left(y_i, \forall i\right) \in X$$

$$\text{Αν } \left(x_i, \forall i\right), \left(y_i, \forall i\right) \in X \text{ τότε } \left(\lambda x_i + (1-\lambda) y_i, \forall i\right) \in X \text{ όπου } \lambda \in [0,1]$$

$$\exists U\left(x_1, \ldots, x_n\right) \text{ αν } \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in X$$

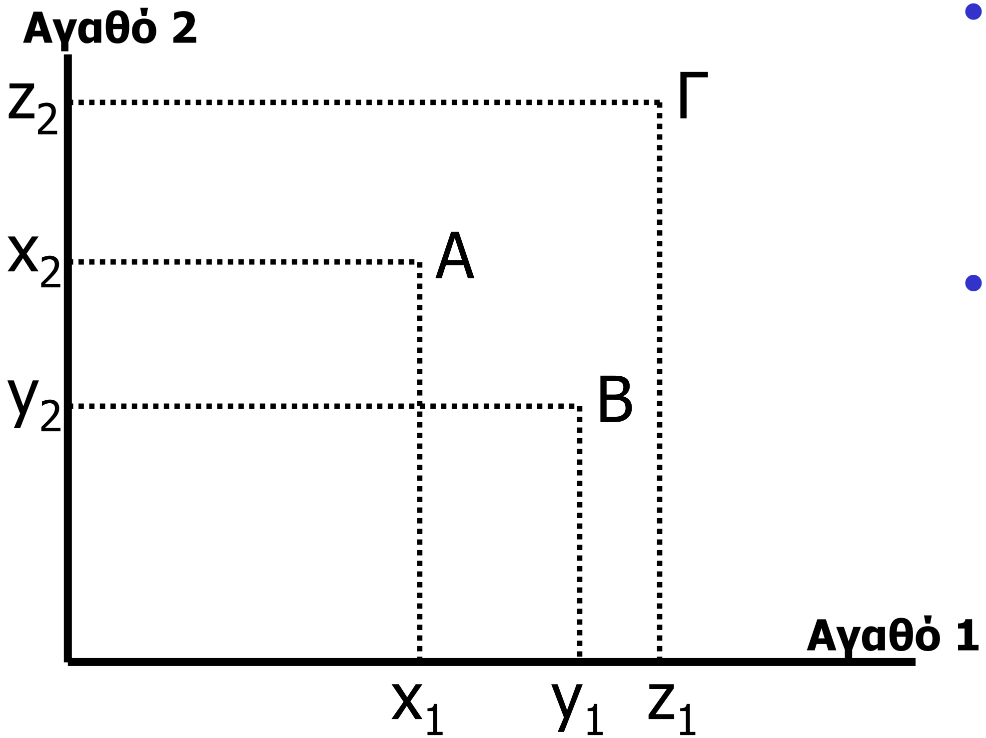
$$\exists \partial U \big/ \partial x_i \text{ και } \exists \partial^2 U \big/ \partial x_i \partial x_j, \forall i, \forall j$$

$$\text{Αν } \left(y_i \geq x_i, \forall i\right) \text{ τότε } U\left(y_1, \ldots, y_n\right) \geq U\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

$$\text{Αν } U\left(y_1, \ldots, y_n\right) \geq U\left(x_1, \ldots, x_n\right) \text{ τότε } U\left(\lambda x_i + (1-\lambda) y_i, \forall i\right) \geq U\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

$$\text{όπου } \lambda \in [0,1]$$

5. Η υποκατάσταση μεταξύ αγαθών



$$U(\Gamma) > U(A), U(\Gamma) > U(B)$$

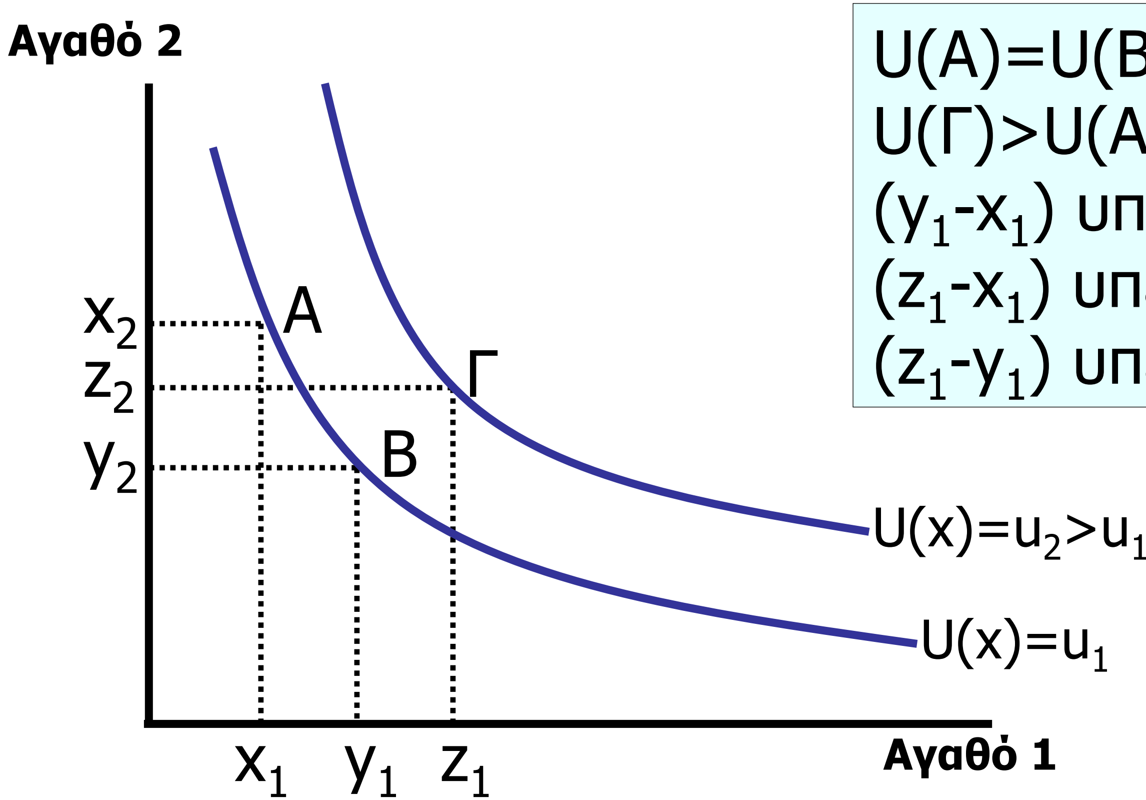
$$\text{Υποθέτουμε } U(A) = U(B)$$

$$\text{τότε } (y_1 - x_1) \text{ αντισταθμίζει } (x_2 - y_2)$$

- Αν A και B δύο καλάθια αγαθών και το B περιλαμβάνει ποσότητες μεγαλύτερες ή ίσες από αυτές του A, το B είναι πιο χρήσιμο από το A.
- Αν όμως σε άλλα αγαθά οι ποσότητες του B είναι μεγαλύτερες από αυτές του A και σε άλλα οι ποσότητες του B είναι μεγαλύτερες από του A, ο αποφασίζων μπορεί πάλι να προτιμά ένα από τα δύο καλάθια, αλλά μπορεί και να είναι αδιάφορος μεταξύ τους.
- Σε αυτήν την περίπτωση, η χρησιμότητα είναι ίδια για τα δύο καλάθια: οι παραπάνω ποσότητες του A αντισταθμίζουν (υποκαθιστούν) τις παραπάνω ποσότητες του B.

6. Η καμπύλη αδιαφορίας

- Η καμπύλη αδιαφορίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των καλαθιών αγαθών για τα οποία η συνάρτηση χρησιμότητας λαμβάνει την ίδια τιμή



$U(A)=U(B)$

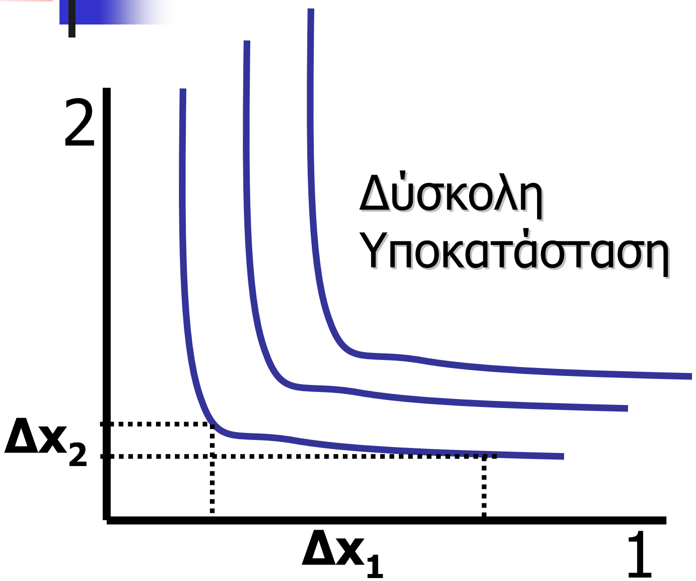
$U(\Gamma)>U(A$ ή $B)$

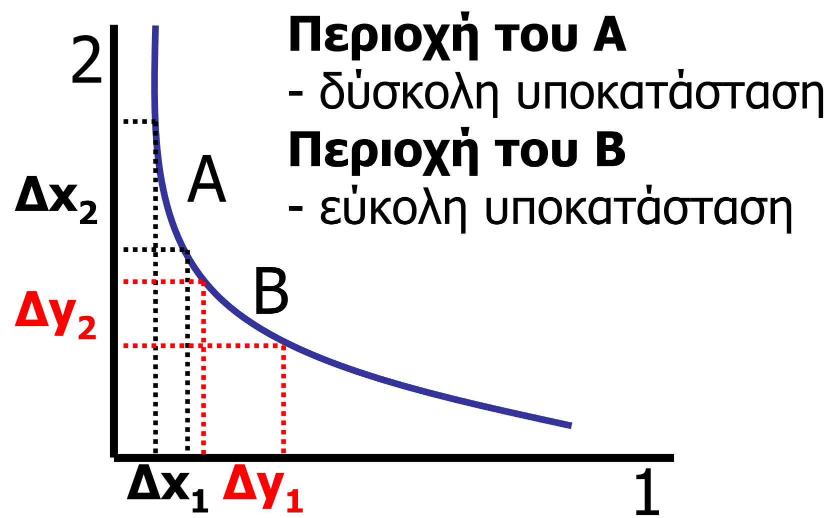
(y_1-x_1) υποκαθιστά (x_2-y_2)

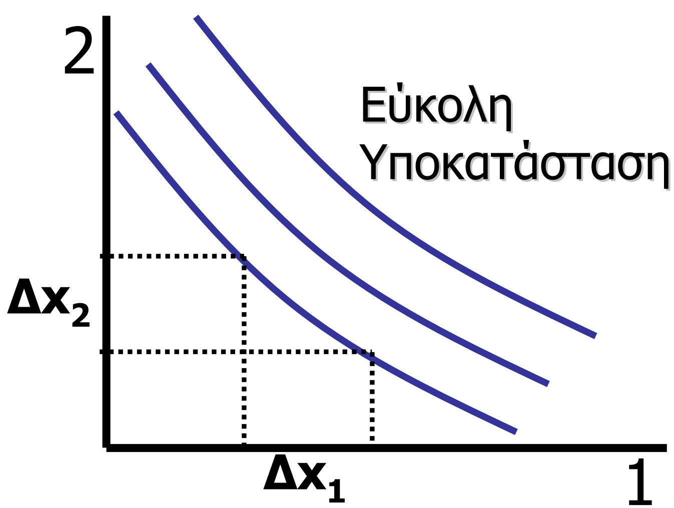
(z_1-x_1) υπερκαλύπτει (x_2-z_2)

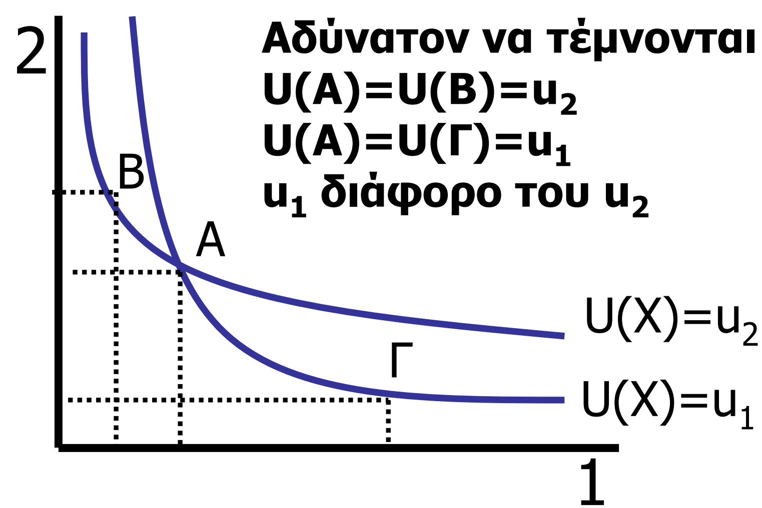
(z_1-y_1) υπερκαλύπτει (z_2-y_2)

6. Η καμπύλη αδιαφορίας (συνέχεια)

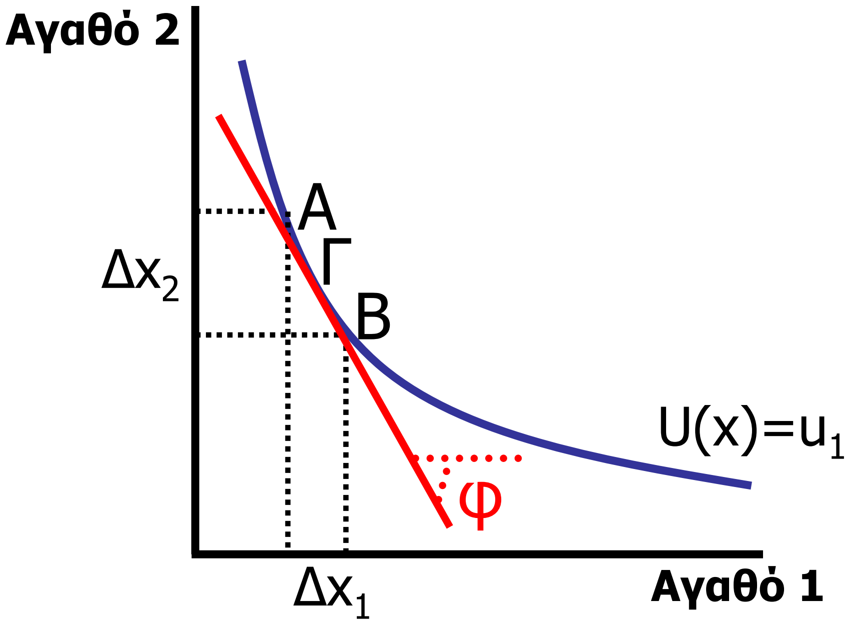








7. Βαθμός Υποκατάστασης Αγαθών



$$RCS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} \qquad \text{εφόσον}$$

$$U(x) = \bar{u} \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow dx_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

- **Επί της καμπύλης αδιαφορίας, η αλλαγή του καλαθιού Α με το Β δεν επιφέρει αλλαγή της Χρησιμότητας: υποκατάσταση Δx_2 με Δx_1**
- **Οριακά, τα σημεία Α και Β πλησιάζουν μεταξύ τους ορίζοντας το σημείο Γ όπου μέτρο της υποκατάστασης είναι η κλίση της εφαπτομένης (κόκκινη ευθεία) της καμπύλης αδιαφορίας στο σημείο Γ**
- **εφ(φ) = $-\Delta x_2/\Delta x_1$ είναι ο βαθμός υποκατάστασης των δύο αγαθών στο σημείο Γ**
- **τοπική ιδιότητα της καμπύλης αδιαφορίας**

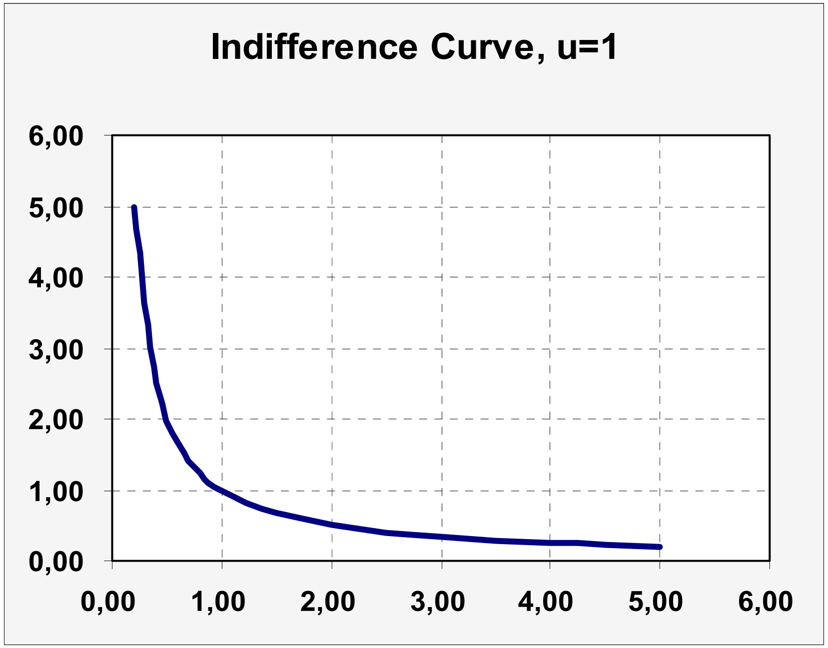
Παράδειγμα

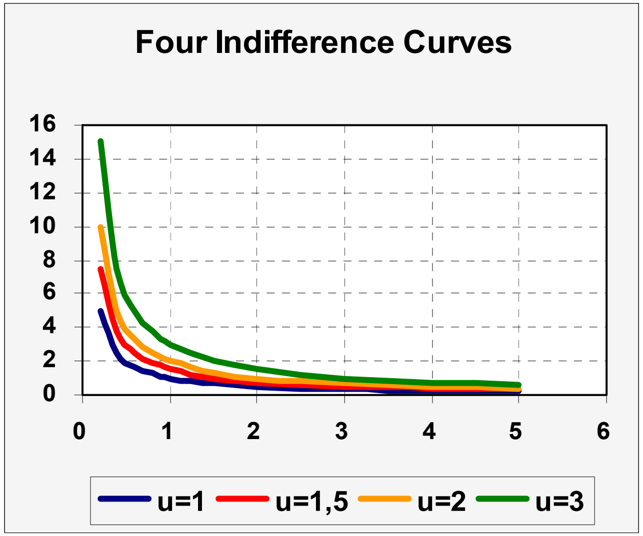
$$U(X) = x_1 x_2$$

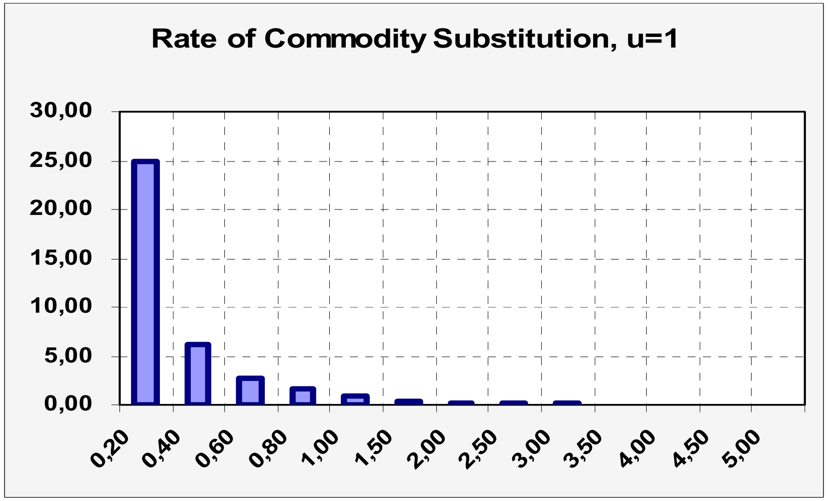
$$\partial U / \partial x_1 = x_2$$

$$\partial U / \partial x_2 = x_1$$

$$RCS = x_2 / x_1$$







Οικονομική Βελτιστοποίηση

1. Το τυπικό πρόβλημα
2. Ύπαρξη λύσης
3. Κατάστρωση Οικονομικής Μεγιστοποίησης
4. Συναρτήσεις Ζήτησης
5. Το δυϊκό πρόβλημα
6. Κατάστρωση Ελαχιστοποίησης Δαπάνης
7. Συναρτήσεις Αντισταθμισμένης Ζήτησης

1. Το τυπικό πρόβλημα

- Αντικείμενο της Οικονομικής Βελτιστοποίησης
  - Προσδιορισμός των Ποσοτήτων Αγαθών (οι άγνωστοι)
- Αντικειμενικός στόχος της Βελτιστοποίησης
  - Μεγιστοποίηση του οφέλους (χρησιμότητας) από τις ποσότητες των αγαθών
  - Ο στόχος απεικονίζει μονότονα τους αγνώστους σε μία μόνο διάσταση στην οποία ορίζεται διάταξη
- Περιορισμός Πόρων
  - Η δαπάνη ή το κόστος ή ισοδύναμος μετασχηματισμός των ποσοτήτων των αγαθών είναι περιορισμένη προς τα άνω
  - Για παράδειγμα, ένας γραμμικός συνδυασμός των ποσοτήτων των αγαθών πρέπει να έχει τιμή μικρότερη ή ίση ενός δεδομένου άνω ορίου

Άγνωστοι Μεταβλητές

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x \in X \subseteq \Re^n$$

Αντικειμενική Συνάρτηση (στόχος)

$$Max\ u = U(x_1, \dots, x_n),\ u \in \Re$$

Περιορισμός

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Phi \subseteq X$$

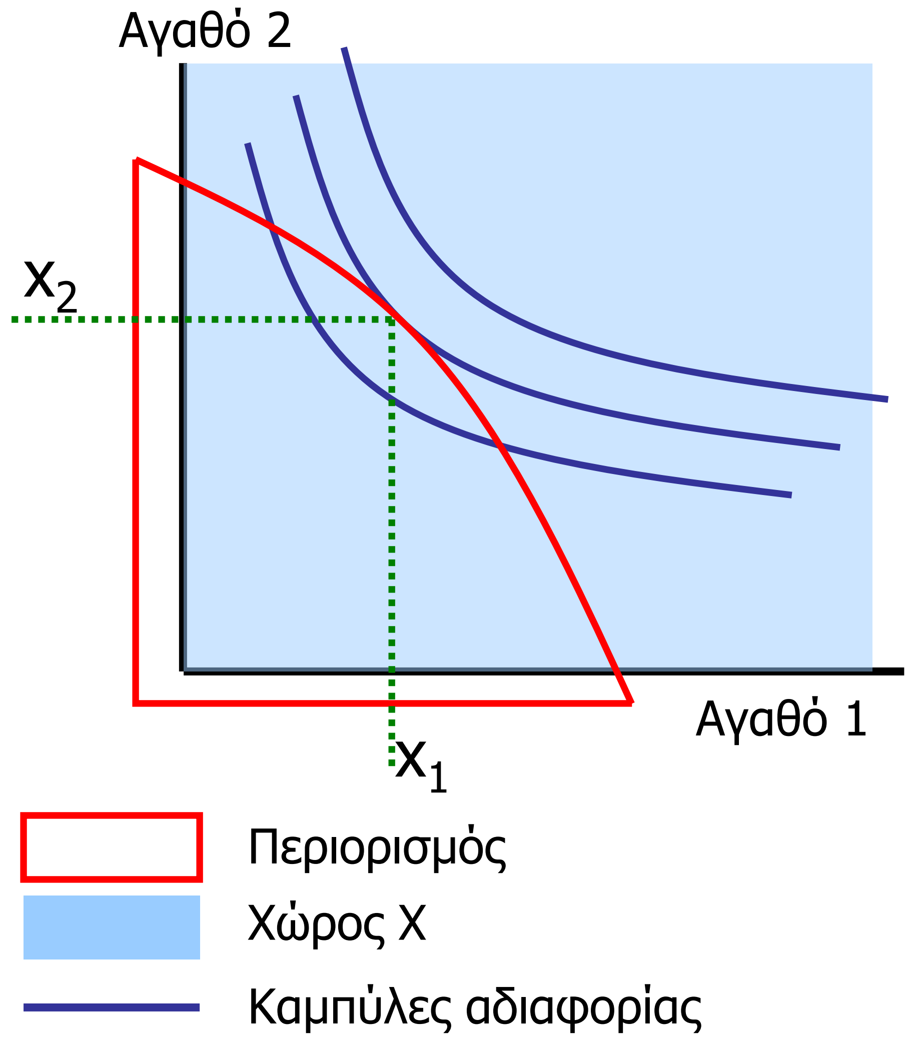
Παράδειγμα Περιορισμού

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R$$

όπου $p_i, \forall i$ και R γνωστά μεγέθη

2. Ύπαρξη Λύσης

- Αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνεχής, μονότονα αύξουσα, χωρίς άνω περιορισμό στις άγνωστες ποσότητες και κοίλη
- Αν ο περιορισμός είναι κυρτός, περιορισμένος προς τα άνω ως προς τις άγνωστες ποσότητες και ο χώρος του έχει κοινό σημείο με τον χώρο των ποσοτήτων
- Τότε υπάρχει λύση, δηλαδή ευρίσκονται συγκεκριμένες ποσότητες (οι βέλτιστες) που μεγιστοποιούν το στόχο και δεν παραβιάζουν τον περιορισμό



3. Κατάστρωση Οικονομικής Μεγιστοποίησης

Να υπολογισθούν οι άγνωστοι $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \Re^n$ επιλύοντας

Πρόβλημα (1)
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & u = U(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R \end{array}$$

όπου $p_i, \forall i$ είναι οι δεδομένες τιμές των αγαθών και R ο δεδομένος προϋπολογισμός για τη δαπάνη (εισόδημα)

Έστω ότι η βέλτιστη λύση είναι $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, τότε $u^* = U(x^*)$ είναι η μεγίστη δυνατή χρησιμότητα.

Αν στο βέλτιστο $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* < R$ υπάρχει εισόδημα αδιάθετο, οπότε τυχόν πρόσθετο εισόδημα ΔR δεν θα χρησίμευε.

Αν όμως στο βέλτιστο $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = R$ τυχόν πρόσθετο εισόδημα ΔR θα επέτρεπε πρόσθετη χρησιμότητα Δu^*. Ορίζεται επομένως η **Οριακή Χρησιμότητα** ως $\lambda = \frac{\Delta u^*}{\Delta R}$ για την οποία ισχύει $\lambda = 0$ αν $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* < R$ αλλιώς $\lambda > 0$.

4. Συναρτήσεις από το (1)

Η επίλυση του προβλήματος (1) για διάφορες αριθμητικές τιμές των γνωστών παραμέτρων $p_i, \forall i$ και R, ορίζει τις εξής συναρτήσεις:

- **Συνάρτηση Ζήτησης Αγαθού**: ο γεωμετρικός τόπος των βέλτιστων ποσοτήτων των αγαθών για κάθε αριθμητική τιμή των τιμών των αγαθών και του εισοδήματος
  $x_i^* = f_i(R; p_1, \ldots, p_n) \quad \forall i = 1, \ldots, n$
  Η συνάρτηση ζήτησης είναι ομογενής βαθμού μηδέν στο εισόδημα και τις τιμές: $f_i(kR; kp_1, \ldots, kp_n) = k^0 f_i(R; p_1, \ldots, p_n)$
- **Έμμεση Συνάρτηση Χρησιμότητας**: ο γεωμετρικός τόπος των βέλτιστων επιπέδων της χρησιμότητας για κάθε αριθμητική τιμή των τιμών των αγαθών και του εισοδήματος
  $u^* = V(R; p_1, \ldots, p_n)$, ομογενής βαθμού μηδέν στο εισόδημα και τις τιμές.

Επομένως η οριακή χρησιμότητα είναι η παράγωγος της έμμεσης συνάρτησης χρησιμότητας ως προς το εισόδημα

$$\lambda = \frac{\partial V(R; p_1, \ldots, p_n)}{\partial R}$$

Έτσι προκύπτει ότι η βέλτιστη χρησιμότητα είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του εισοδήματος.

5. Το δυϊκό πρόβλημα

- Στο πρωτεύον πρόβλημα (1) ο αποφασίζων επιδιώκει να μεγιστοποιήσει τον αντικειμενικό του στόχο έχοντας άνω περιορισμό από κάποιο πόρο
- Στο δυϊκό πρόβλημα (2) ο αποφασίζων επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει τη χρήση του πόρου έτσι ώστε τουλάχιστον να επιτύχει μία δεδομένη επίδοση (ένα δεδομένο επίπεδο) στον αντικειμενικό του στόχο
- Τόσο στο πρωτεύον όσο και στο δυϊκό πρόβλημα, οι άγνωστοι της βελτιστοποίησης είναι οι ποσότητες των αγαθών και δεδομένες είναι οι τιμές των αγαθών
- Κάθε πρόβλημα είναι δυϊκό του άλλου, με την εξής έννοια: για δεδομένες τιμές των αγαθών, λύνοντας το (1) προσδιορίζεται το βέλτιστο επίπεδο στόχου δεδομένου του πόρου, οπότε θέτοντας το επίπεδο στόχου ως το απαιτούμενο κατ' ελάχιστον στο (2) και λύνοντάς το ευρίσκουμε ως βέλτιστη χρήση του πόρου το επίπεδο από το οποίο ξεκίνησε το πρόβλημα (1), ενώ οι βέλτιστες ποσότητες των αγαθών βρίσκονται ίδιες και από τα δύο προβλήματα.
- Από το πρόβλημα (1) προκύπτει η (κοινή) συνάρτηση ζήτησης αγαθών και η συνάρτηση έμμεσης χρησιμότητας, ενώ από το πρόβλημα (2) προκύπτει η αντισταθμισμένη συνάρτηση ζήτησης αγαθών και η συνάρτηση δαπάνης

6. Κατάστρωση της Ελαχιστοποίησης Δαπάνης

Να υπολογισθούν οι άγνωστοι $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \Re^n$ επιλύνοντας

Πρόβλημα (2)
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & R = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{s.t.} & U(x_1, \ldots, x_n) \geq u \end{array}$$

όπου $p_i, \forall i$ είναι οι δεδομένες τιμές των αγαθών και u το δεδομένο επίπεδο χρησιμότητας που απαιτείται κατ' ελάχιστον.

Έστω ότι η βέλτιστη λύση είναι $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, τότε $R^* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*$ είναι η ελαχίστη δυνατή δαπάνη.

Αν στο βέλτιστο $U(x_1^*, \ldots, x_n^*) > u$ επιτυγχάνεται περισσότερη χρησιμότητα από ότι απαιτείτο κατ' ελάχιστον, παρά την ελαχιστοποίηση της δαπάνης, οπότε τυχόν οριακή μείωση του απαιτούμενου επιπέδου χρησιμότητας δεν θα μείωνε την ελάχιστη δαπάνη και άρα η μείωση Δu δεν θα εξοικονομούσε τίποτα. Αν όμως στο βέλτιστο $U(x_1^*, \ldots, x_n^*) = u$ τυχόν απαίτηση οριακά αυξημένου επιπέδου χρησιμότητας Δu θα οδηγούσε σε πρόσθετη δαπάνη ΔR^* παρά το γεγονός ότι η δαπάνη ελαχιστοποιείται.

Ορίζεται επομένως η **Οριακή Δαπάνη** ως $\mu = \dfrac{\Delta R^*}{\Delta u}$ για την οποία ισχύει

$\mu = 0$ αν $U(x_1^*, \ldots, x_n^*) > u$ αλλιώς $\mu > 0$.

7. Συναρτήσεις από το (2)

Η επίλυση του προβλήματος (2) για διάφορες αριθμητικές τιμές των γνωστών παραμέτρων $p_i, \forall i$ και u, ορίζει τις εξής συναρτήσεις:

- **Συνάρτηση Αντισταθμισμένης Ζήτησης Αγαθού**: ο γεωμετρικός τόπος των βέλτιστων ποσοτήτων των αγαθών για κάθε αριθμητική τιμή των τιμών των αγαθών και του κατ' ελάχιστον απαιτουμένου επιπέδου χρησιμότητας
  $x_i^* = h_i(u; p_1, \dots, p_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$
  Η συνάρτηση αντισταθμισμένης ζήτησης είναι ομογενής βαθμού μηδέν στις τιμές: $h_i(u; kp_1, \dots, kp_n) = k^0 h_i(u; p_1, \dots, p_n)$
- **Συνάρτηση Δαπάνης**: ο γεωμετρικός τόπος των ελαχίστων επιπέδων της δαπάνης για κάθε αριθμητική τιμή των τιμών των αγαθών και της απαιτουμένης χρησιμότητας
  $R^* = D(u; p_1, \dots, p_n)$, ομογενής βαθμού 1 στις τιμές

Επομένως η οριακή δαπάνη είναι η παράγωγος της συνάρτησης δαπάνης ως προς το απαιτούμενο επίπεδο της χρησιμότητας

$$\mu = \frac{\partial D(u; p_1, \dots, p_n)}{\partial u}$$

Έτσι προκύπτει ότι η ελαχίστη δαπάνη είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του απαιτούμενου επιπέδου χρησιμότητας.

Βελτιστοποίηση – Υπολογισμοί (1)

$$(1)\left\| \begin{array}{ll} Max & u = U(x_1, x_2) \\ s.t. & p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{array} \right.$$

Λόγω των ιδιοτήτων της U στη βέλτιστη λύση εξαντλείται όλο το εισόδημα (πόρος)

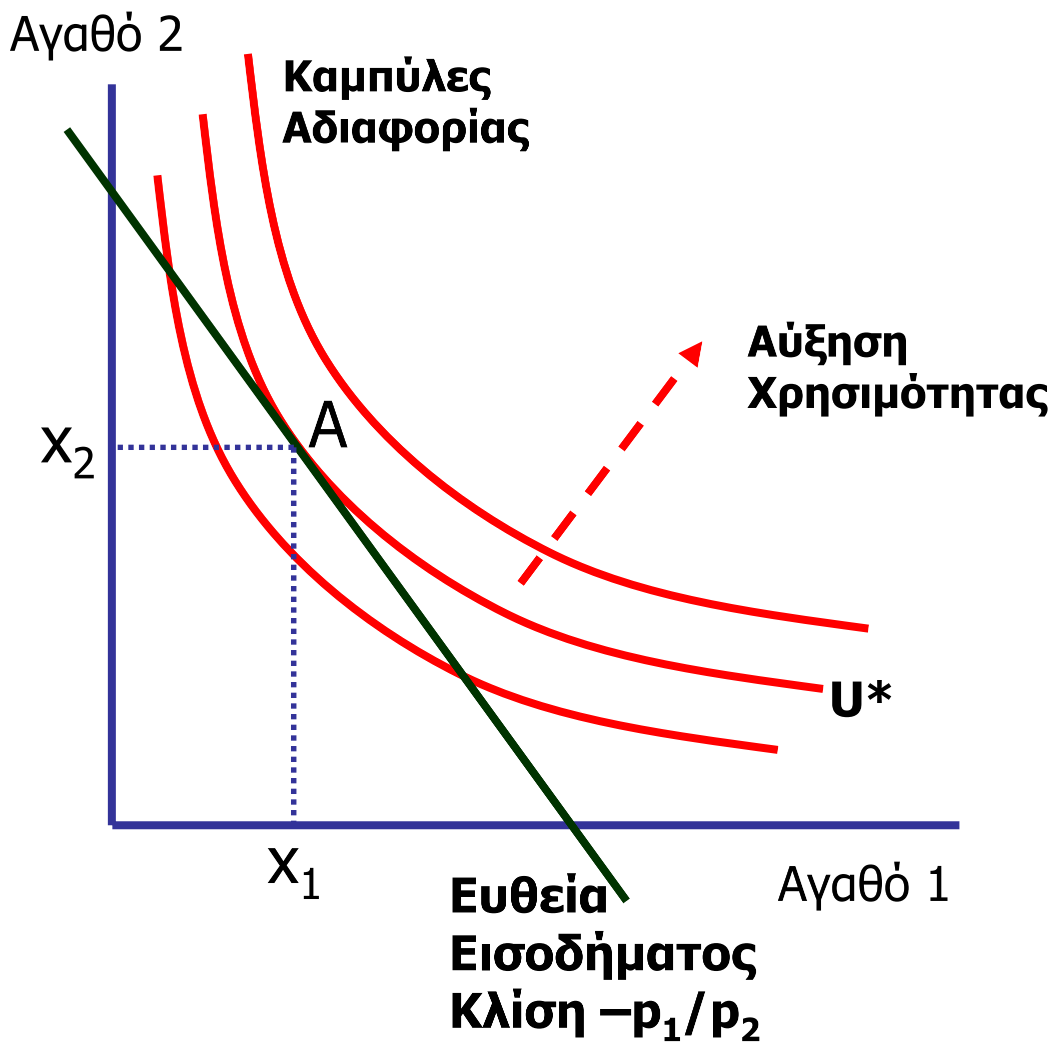
Langrangian $\Im = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

όπου λ νέα μεταβλητή (πολλαπλασιαστής Langrange) με $\lambda = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{R}}$ η οριακή χρησιμότητα

Αρκεί η βελτιστοποίηση της Langrangian χωρίς περιορισμούς

$$(2)\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \lambda} = R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2} = RCS \text{ και } \begin{vmatrix} \partial^2 \mathrm{U} / \partial x_1^2 & \partial^2 \mathrm{U} / \partial x_1 \partial x_2 & -p_1 \\ \partial^2 \mathrm{U} / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 \mathrm{U} / \partial x_2^2 & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Γραφική Απεικόνιση (1)



- Το βέλτιστο A βρίσκεται αναγκαστικά επί της ευθείας εισοδήματος
- Το βέλτιστο A βρίσκεται σε εκείνη την καμπύλη αδιαφορίας στην οποία η ευθεία εισοδήματος είναι και εφαπτομένη (η κλίση της ευθείας εισοδήματος είναι ο λόγος των τιμών που στο βέλτιστο ταυτίζεται με το RCS δηλαδή την κλίση της εφαπτομένης)
- Υπάρχει πάντοτε βέλτιστη λύση και σε αυτή εξαντλείται το εισόδημα

Βελτιστοποίηση – Υπολογισμοί (2)

$$(3)\left\|\begin{array}{ll} Min & R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ s.t. & U(x_1, x_2) = u \end{array}\right.$$

Λόγω των ιδιοτήτων της U στη βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται ακριβώς το απαιτούμενο επίπεδο χρησιμότητας u

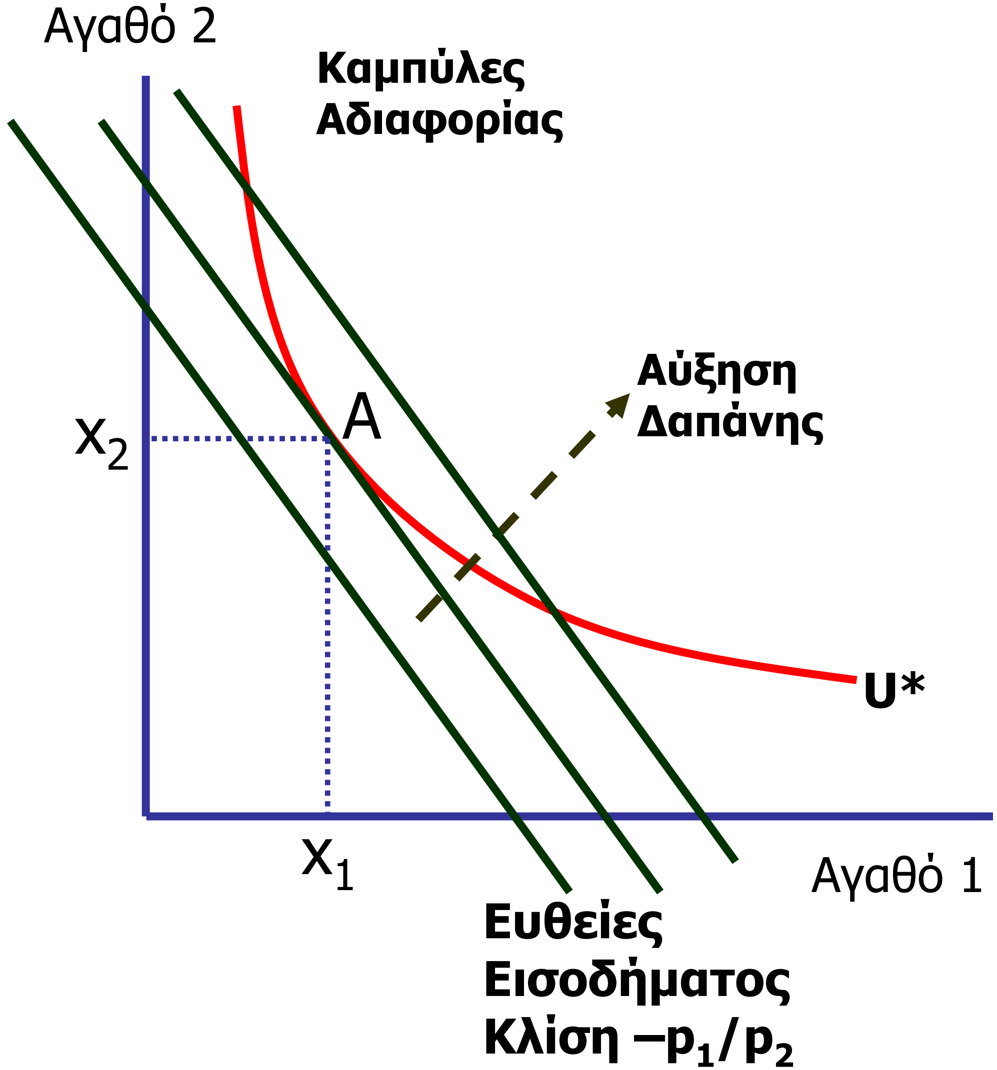
Langrangian $\Im = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu\left(u - U(x_1, x_2)\right)$

όπου μ νέα μεταβλητή (πολλαπλασιαστής Langrange) με $\mu = \dfrac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{u}}$ η οριακή δαπάνη

Αρκεί η βελτιστοποίηση της Langrangian χωρίς περιορισμούς

$$(4)\left\|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = p_1 - \mu \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = p_2 - \mu \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \mu} = u - U(x_1, x_2) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} = RCS \text{ δηλαδή ίδια συνθήκη βελτίστου με (2)}$$

Γραφική Απεικόνιση (2)



- Το βέλτιστο Α βρίσκεται αναγκαστικά επί της καμπύλης αδιαφορίας
- Το βέλτιστο Α βρίσκεται σε εκείνη την ευθεία εισοδήματος η οποία συμπίπτει με την εφαπτομένη της καμπύλης αδιαφορίας (η κλίση της ευθείας εισοδήματος είναι ο λόγος των τιμών που στο βέλτιστο ταυτίζεται με το RCS δηλαδή την κλίση της εφαπτομένης)
- Υπάρχει πάντοτε βέλτιστη λύση και σε αυτή επιτυγχάνεται ακριβώς το ζητούμενο επίπεδο χρησιμότητας

Παράδειγμα Συνάρτησης Ζήτησης

- Η συνάρτηση ζήτησης προσδιορίζεται αλγεβρικά ή αριθμητικά λύνοντας το σύστημα εξισώσεων (2) που προκύπτει από τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας σύμφωνα με το πρόβλημα (1)
- Η συνάρτηση ζήτησης (κανονική ή Hicksian) εκφράζει τη συμπεριφορά: δεδομένου του προϋπολογισμού ποιες ποσότητες αγαθών πρέπει να επιλεγούν ώστε να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητα;

$$(1) \quad \left| \begin{array}{ll} Max & u = x_1 x_2 \\ s.t. & p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{array} \right.$$

$$(2) \quad Max \quad \Im = x_1 x_2 + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

από το (2) προκύπτουν οι συναρτήσεις ζήτησης :

$$x_1 = \frac{R}{2p_1}$$

$$x_2 = \frac{R}{2p_2}$$

επίσης η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας και

η οριακή χρησιμότητα :

$$u^* = V = \frac{R^2}{4p_1 p_2} \qquad \lambda = \frac{du}{dR} = \frac{R}{2p_1 p_2}$$

Επιβεβαιώστε την ομογένεια βαθμού μηδέν στις

τιμές και το εισόδημα

Αντισταθμιστική Συνάρτησης Ζήτησης

- Η αντισταθμιστική συνάρτηση ζήτησης προσδιορίζεται αλγεβρικά ή αριθμητικά λύνοντας το σύστημα εξισώσεων (4) που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της δαπάνης σύμφωνα με το πρόβλημα (2)
- Η αντισταθμιστική συνάρτηση ζήτησης (compensated) εκφράζει: δεδομένου του απαιτούμενου επιπέδου χρησιμότητας ποιες ποσότητες αγαθών πρέπει να επιλεγούν ώστε να ελαχιστοποιηθεί η δαπάνη;

$$(3) \quad \left| \begin{array}{ll} Min & R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ s.t. & x_1 x_2 = u \end{array} \right.$$

$$(4) \quad Min \quad \Im = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(u - x_1 x_2)$$

από το (4) προκύπτουν οι αντισταθμιστικές συναρτήσεις ζήτησης :

$$x_1 = \sqrt{u \frac{p_2}{p_1}} \qquad x_2 = \sqrt{u \frac{p_1}{p_2}}$$

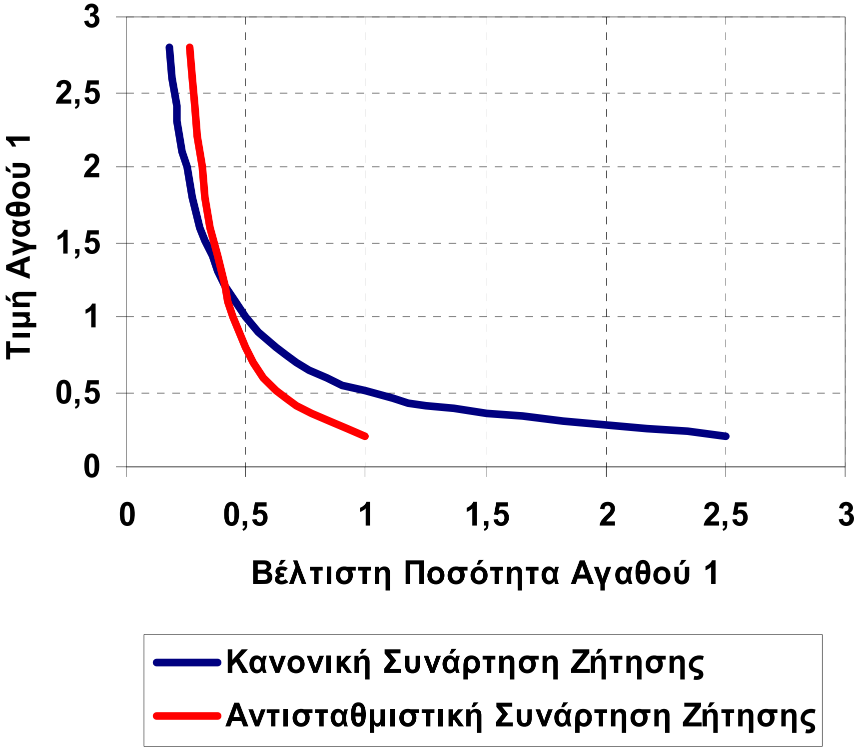
επίσης η συνάρτηση δαπάνης και η οριακή δαπάνη είναι :

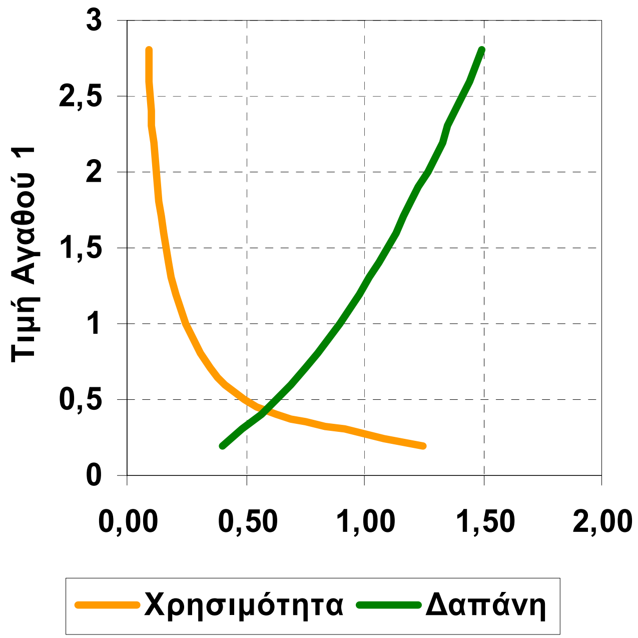
$$R^* = C = 2\sqrt{u p_1 p_2} \qquad \mu = \frac{dR}{du} = \frac{2 p_1 p_2}{R}$$

Επιβεβαιώστε την ομογένεια βαθμού μηδέν στις τιμές.

Γραφικά Συνάρτησης Ζήτησης

Στο αριθμητικό παράδειγμα, τόσο η κανονική όσο και η αντισταθμιστική συνάρτηση ζήτησης έχουν αρνητική κλίση, όμως η κλίση της δεύτερης είναι μεγαλύτερη (γιατί;). Οι δύο συναρτήσεις τέμνονται στο σημείο όπου η ελαχίστη δαπάνη της δεύτερης είναι η δεδομένη δαπάνη της πρώτης και η μεγίστη χρησιμότητα της πρώτης είναι δεδομένο της δεύτερης





Αυξανομένης της τιμής η μεγίστη Χρησιμότητα μειώνεται και η ελαχίστη Δαπάνη αυξάνει

Ελαστικότητες της Ζήτησης

- Ελαστικότητα του Y ως προς το X είναι η ποσοστιαία μεταβολή του Y για 1% μεταβολή του X
- Οι ελαστικότητες της ζήτησης ορίζονται με βάση τις συναρτήσεις ζήτησης και ορίζονται ως προς τις μεταβολές του εισοδήματος, του απαιτούμενου επιπέδου χρησιμότητας και των τιμών των αγαθών

$$\varepsilon_{y/X} = \frac{\dfrac{Y_1 - Y_0}{Y_0}}{\dfrac{X_1 - X_0}{X_0}} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln X}$$

$\varepsilon_{y/X} > 0$ τα δύο μεγέθη αλλάζουν προς την ίδια κατεύθυνση

$\varepsilon_{y/X} < 0$ τα δύο μεγέθη αλλάζουν προς την αντίθετη κατεύθυνση

$\varepsilon_{y/X} = 0$ τα δύο μεγέθη είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους

$\left|\varepsilon_{y/X}\right| > 1$ η συσχέτιση των δύο μεγεθών είναι μεγεθυντική

$\left|\varepsilon_{y/X}\right| < 1$ η συσχέτιση των δύο μεγεθών είναι προς σμίκρυνση

$\left|\varepsilon_{y/X}\right| = 1$ η συσχέτιση των δύο μεγεθών είναι γραμμική

Ελαστικότητες της Ζήτησης

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Ελαστικότητα Εισοδήματος του αγαθού 1 : $\eta_1 = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta R / R} \Bigg|\ p_1, p_2$ σταθερές

Ελαστικότητα Ιδίας Τιμής του αγαθού 1 : $\varepsilon_{11} = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta p_1 / p_1} \Bigg|\ R, p_2$ σταθερά

Σταυροειδής Ελαστικότητα Τιμής του αγαθού 1 ως προς την τιμή του 2 : $\varepsilon_{12} = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta p_2 / p_2} \Bigg|\ R, p_1$ σταθερά

ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Ελαστικότητα Χρησιμότητας του αγαθού 1 : $\omega_1 = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta u / u} \Bigg|\ p_1, p_2$ σταθερές

Ελαστικότητα Ιδίας Τιμής του αγαθού 1 : $\xi_{11} = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta p_1 / p_1} \Bigg|\ u, p_2$ σταθερά

Σταυροειδής Ελαστικότητα Τιμής του αγαθού 1 ως προς την τιμή του 2 : $\xi_{12} = \dfrac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta p_2 / p_2} \Bigg|\ u, p_1$ σταθερά

Σχέσεις μεταξύ των Ελαστικοτήτων

α) Μεταβολή της δαπάνης σε αγαθό 1 όταν μεταβάλλεται η τιμή του αγαθού :

$$\frac{\partial(p_1 x_1)}{\partial p_1} = x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = x_1(1+\varepsilon_{11}) \text{ οπότε η μεταβολή της δαπάνης είναι } \begin{cases} >0 & \text{αν} \quad \varepsilon_{11} > -1 \\ =0 & \text{αν} \quad \varepsilon_{11} = -1 \\ <0 & \text{αν} \quad \varepsilon_{11} < -1 \end{cases}$$

$$\text{β) Αν } \varepsilon_{11} < 0 \text{ τότε } \begin{cases} \text{αν } \varepsilon_{21} < 0 \text{ τα δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά γιατί } (\uparrow p_1) \Rightarrow (\downarrow x_1) \text{ και } (\downarrow x_2) \\ \text{αν } \varepsilon_{21} > 0 \text{ τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα γιατί } (\uparrow p_1) \Rightarrow (\downarrow x_1) \text{ αλλά } (\uparrow x_2) \end{cases}$$

γ) Για σταθερό εισόδημα και τιμή του αγαθού 2, έχουμε $dR = 0$ και $dp_2 = 0$ οπότε το ολικό διαφορικό

$$dR = p_1 dx_1 + x_1 dp_1 + p_2 dx_2 + x_2 dp_2 = 0 \Rightarrow a_1(\varepsilon_{11}+1) + a_2 \varepsilon_{21} = 0 \text{ όπου } a_1 = \frac{p_1 x_1}{R} \text{ και } a_2 = \frac{p_2 x_2}{R}$$

$$\text{άρα αν } \varepsilon_{11} < 0 \text{ και } \begin{cases} \text{αν } \varepsilon_{11} = -1 \Rightarrow \varepsilon_{21} = 0 \text{ τα αγαθά είναι ασυσχέτιστα} \\ \text{αν } \varepsilon_{11} < -1 \Rightarrow \varepsilon_{21} > 0 \text{ τα αγαθά είναι υποκατάστατα} \\ \text{αν } \varepsilon_{11} > -1 \Rightarrow \varepsilon_{21} < 0 \text{ τα αγαθά είναι συμπληρωματικά} \end{cases}$$

δ) Στο πρόβλημα σταθερής απαιτούμενης χρησιμότητας η μεταβολή της είναι μηδέν, οπότε

$$du = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \text{ ενώ λόγω βελτίστου επίσης ισχύει } \frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} \text{ οπότε προκύπτει}$$

$a_1 \xi_{11} + a_2 \xi_{21} = 0$ οπότε αν $\xi_{11} < 0$ τότε $\xi_{21} > 0$ δηλαδή τα δύο αγαθά είναι υποκατάστατα ως προς τις αντισταθμιστικές συναρτήσεις ζήτησης

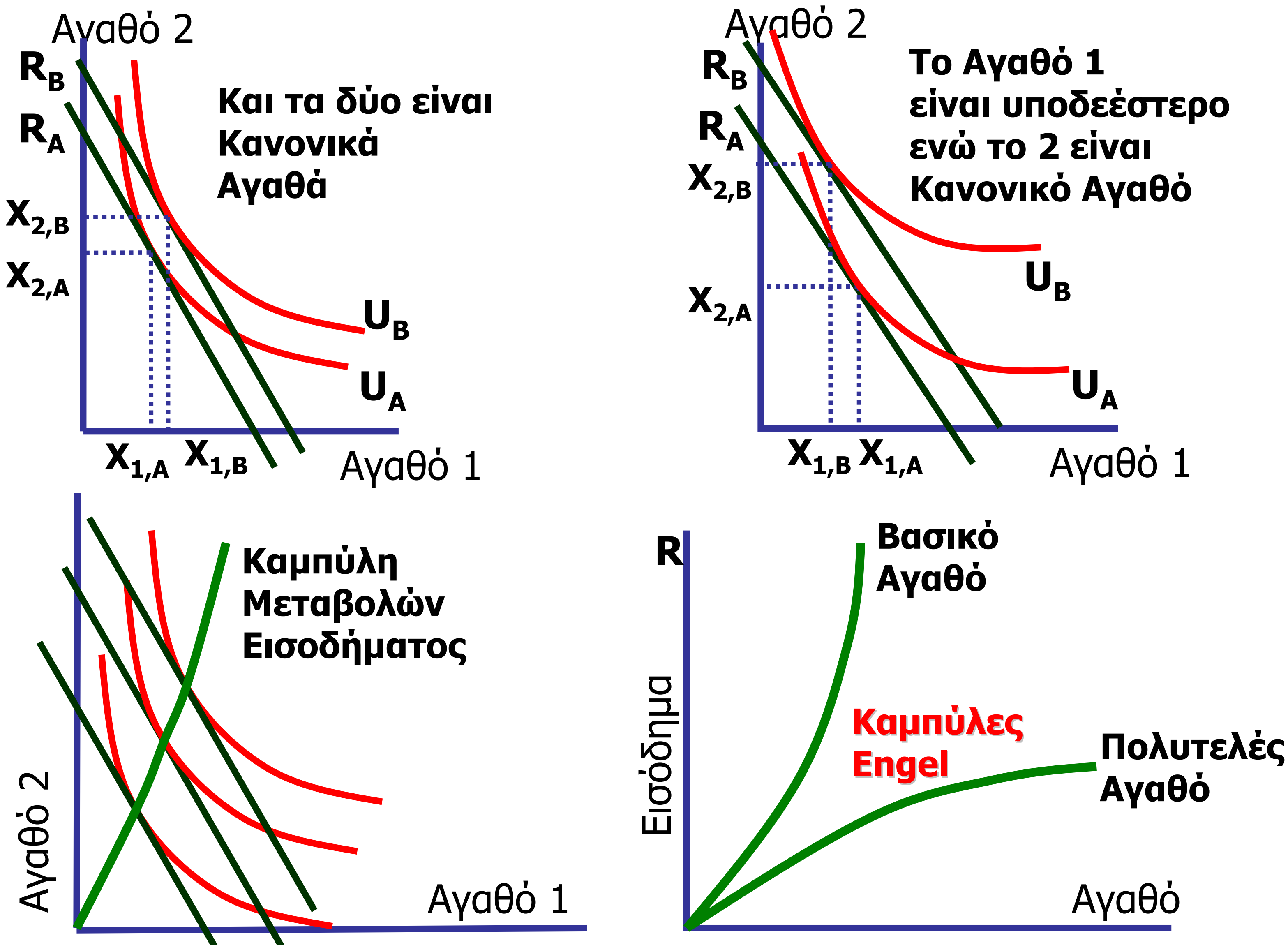
ε) Οι ελαστικότητες εισοδήματος συνδέονται μεταξύ τους. Το ολικό διαφορικό του εισοδήματος είναι

$$dR = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \Rightarrow \qquad a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 = 1$$

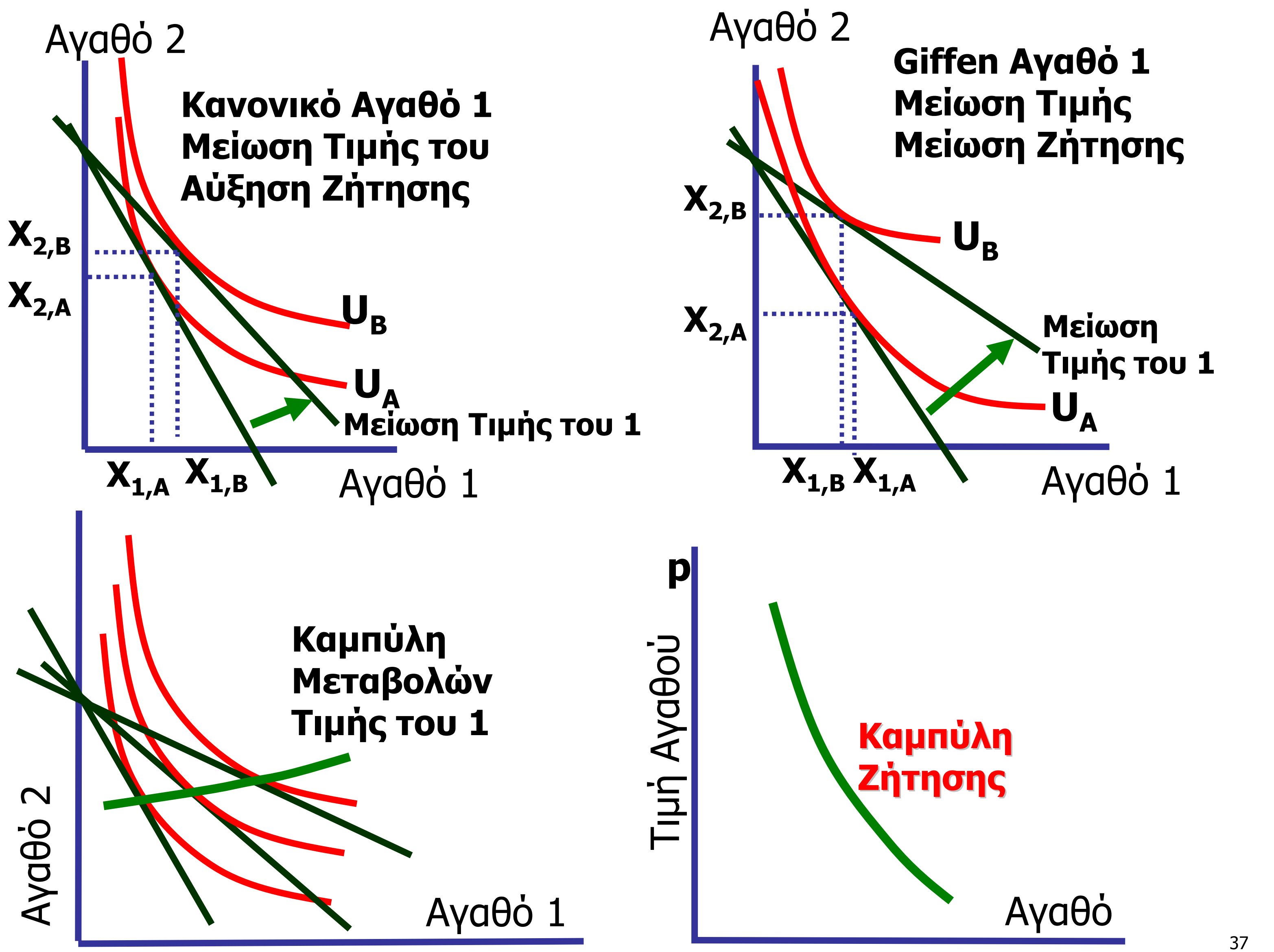
Ερμηνεία των Ελαστικοτήτων

- Ως προς τις κανονικές συναρτήσεις ζήτησης
  - Συνήθως η ελαστικότητα εισοδήματος είναι θετική για όλα τα αγαθά → κανονικά αγαθά
  - Αν είναι αρνητική το αγαθό λέγεται υποδεέστερο
  - Αν η ελαστικότητα εισοδήματος είναι
    - Μεγαλύτερη της μονάδας → το αγαθό λέγεται πολυτελές
    - Μικρότερη της μονάδας → το αγαθό λέγεται βασικό
  - Οι ιδιότητες αυτές έχουν τοπικό χαρακτήρα και μεταβάλλονται με το επίπεδο του εισοδήματος και τις τιμές
  - Καμπύλη Engel ο γεωμετρικός τόπος της βέλτιστης κανονικής ζήτησης όταν μεταβάλλεται το εισόδημα αλλά οι τιμές των αγαθών παραμένουν σταθερές

Γραφικά: ελαστικότητα εισοδήματος



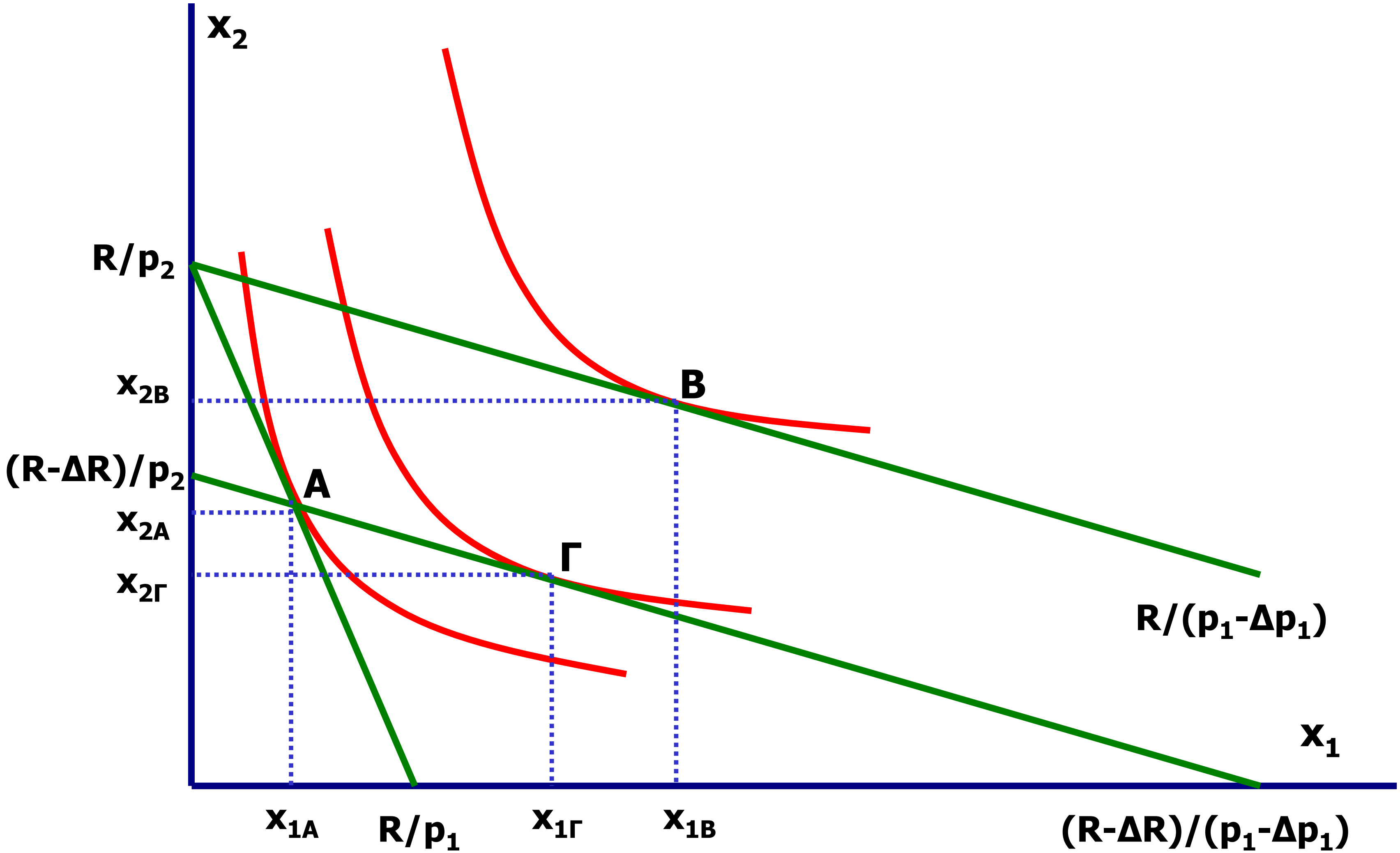
Γραφικά: ελαστικότητα τιμής



Υποκατάσταση: Σχέσεις του Slutsky

- Όταν αυξάνει η τιμή ενός αγαθού και το εισόδημα είναι αμετάβλητο, το επίπεδο της χρησιμότητας μειώνεται γιατί η αύξηση της τιμής δεν οδηγεί σε μειωμένες ποσότητες κατανάλωσης.
- Η αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί τελικά σε μεταβολή της κατανάλωσης του αγαθού, η οποία μπορεί να χωρισθεί σε δύο διαδοχικές μεταβολές:
  - Για να διατηρηθεί το επίπεδο χρησιμότητας αμετάβλητο, πρέπει η αύξηση της τιμής του αγαθού να αντισταθμισθεί από κατάλληλη αύξηση του εισοδήματος. Βεβαίως, στο πλαίσιο του αμετάβλητου επιπέδου χρησιμότητας, η αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί σε μερική υποκατάστασή του από άλλα αγαθά: αυτή η μεταβολή στην κατανάλωση του αγαθού ονομάζεται επίπτωση από υποκατάσταση.
  - Όμως το εισόδημα δεν αυξήθηκε στην πραγματικότητα. Ας επαναφέρουμε το εισόδημα στο πραγματικό του επίπεδο και ας υπολογίσουμε την επίπτωση της μείωσης αυτής του εισοδήματος στην κατανάλωση του αγαθού διατηρώντας την τιμή του όπως ήταν πριν την αύξηση. Αυτή η μεταβολή, που ονομάζεται επίπτωση από το εισόδημα, πρέπει να αφαιρεθεί από την επίπτωση από υποκατάσταση ώστε να βρούμε την τελική μεταβολή της κατανάλωσης του αγαθού από την αύξηση της τιμής του
- Ο διαχωρισμός αυτός σε επίπτωση από υποκατάσταση και σε επίπτωση από το εισόδημα χρησιμεύει στην ανάλυση της σχέσης υποκατάστασης ή συμπληρωματικότητας μεταξύ δύο αγαθών.

Ταυτόχρονη μεταβολή εισοδήματος και τιμής



Εξήγηση διαγράμματος

Ταυτόχρονη μεταβολή εισοδήματος και τιμής

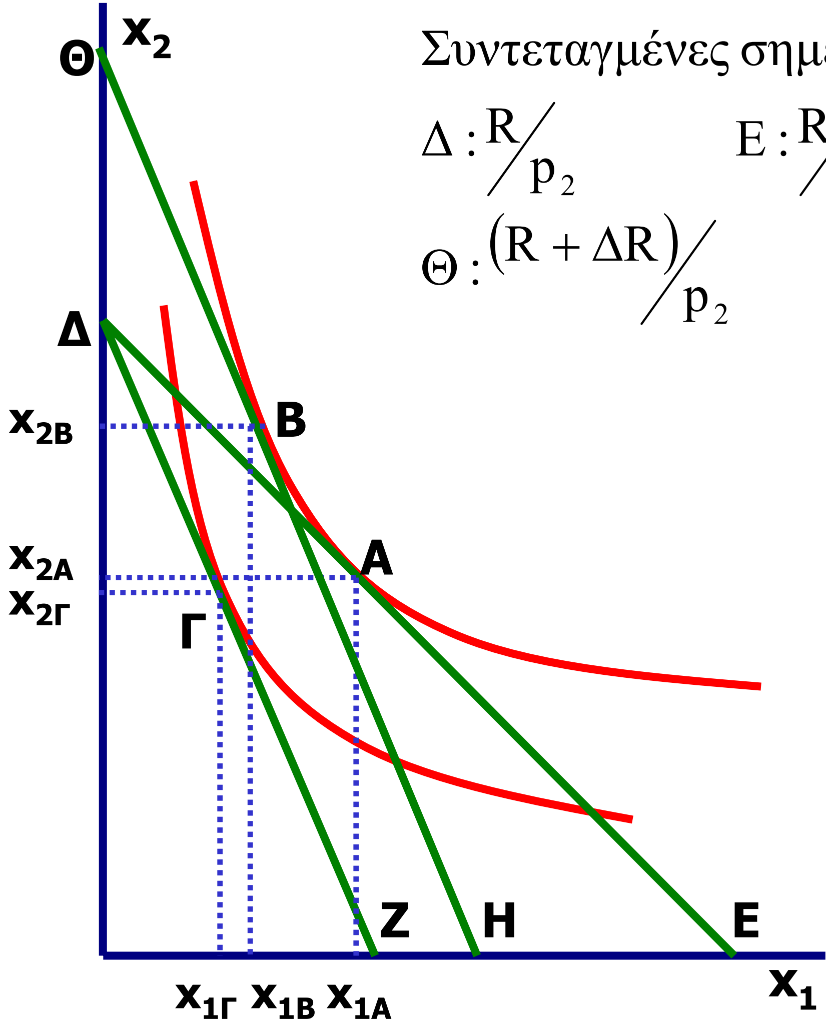
- **Α: Αρχικό σημείο για εισόδημα R και τιμές p_1 και p_2**
- **Μείωση της τιμής του αγαθού 1 κατά Δp_1 οδηγεί σε περιστροφή της ευθείας εισοδήματος, οπότε το νέο βέλτιστο σημείο είναι το Β. Εύλογα στο σημείο Β η ζήτηση του αγαθού 1 είναι αυξημένη σε σχέση με το Α. Από το σημείο Β, μείωση του εισοδήματος κατά ΔR οδηγεί σε παράλληλη μετατόπιση της ευθείας εισοδήματος, οπότε το νέο βέλτιστο είναι το Γ. Στο σημείο αυτό η ζήτηση του αγαθού 1 είναι μειωμένη σε σχέση με το σημείο Β. Συνολικά, η επίπτωση της ταυτόχρονης μεταβολής του εισοδήματος και της τιμής ισοδυναμεί με μεταβολή της ζήτησης του αγαθού 1 ως εξής:**

  $x_{1,Γ}-x_{1,Α}=(x_{1,Β}-x_{1,Α})-(x_{1,Β}-x_{1,Γ})$ όπου ο πρώτος όρος είναι η επίπτωση υποκατάστασης και ο δεύτερος είναι η επίπτωση από το εισόδημα

Παράδειγμα μεταβολής εισοδήματος και τιμής

- Η ζήτηση αγαθού έχει τη μορφή q=10+R/(10p)
- Για εισόδημα R=120 και τιμή p=3 η ζήτηση είναι q=14
- Η τιμή μειώνεται σε p=2, οπότε η ζήτηση γίνεται q=16, άρα η μεταβολή της ζήτησης Δq είναι +2
- Πόσο εισόδημα θα χρειαζόμασταν ώστε να αρκεί για το αρχικό επίπεδο ζήτησης; Μέσω των μεταβολών της συνάρτησης ζήτησης υπολογίζουμε ότι θα χρειασθούμε ΔR=qΔp=14x(2-3)=-14, οπότε με εισόδημα R=120-14=106 η ζήτηση θα είναι q=10+106/(10x2)=15,3 άρα η επίπτωση υποκατάστασης είναι Δq_s=15,3-14=1,3
- Αποκαθιστώντας τώρα το εισόδημα στο πραγματικό του επίπεδο (δηλαδή 120) και διατηρώντας τη νέα τιμή (δηλαδή ίση με 2), υπολογίζουμε την επίπτωση από το εισόδημα Δq_R=ΔR/(10p)=(120-106)/(10x2)=0,7
- Πράγματι η συνολική μεταβολή της ζήτησης είναι το άθροισμα των επιμέρους επιπτώσεων: $\Delta q=\Delta q_s+\Delta q_R$=1,3+0,7=2

Ταυτόχρονη μεταβολή εισοδήματος και τιμής κατά Slutsky



Συντεταγμένες σημείων

$\Delta : R/p_2$ $\quad E : R/p_1$ $\quad Z : R/(p_1 + \Delta p_1)$

$\Theta : (R + \Delta R)/p_2$ $\quad H : (R + \Delta R)/(p_1 + \Delta p_1)$

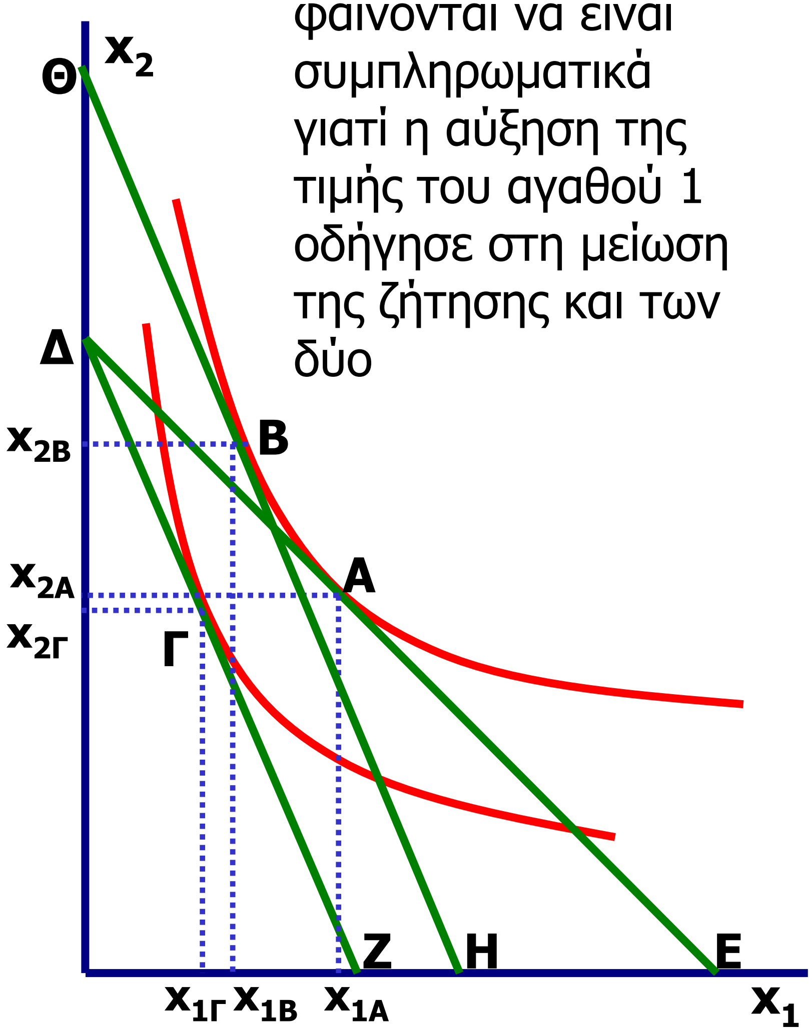
Εξήγηση διαγράμματος

Ταυτόχρονη μεταβολή εισοδήματος και τιμής κατά Slutsky

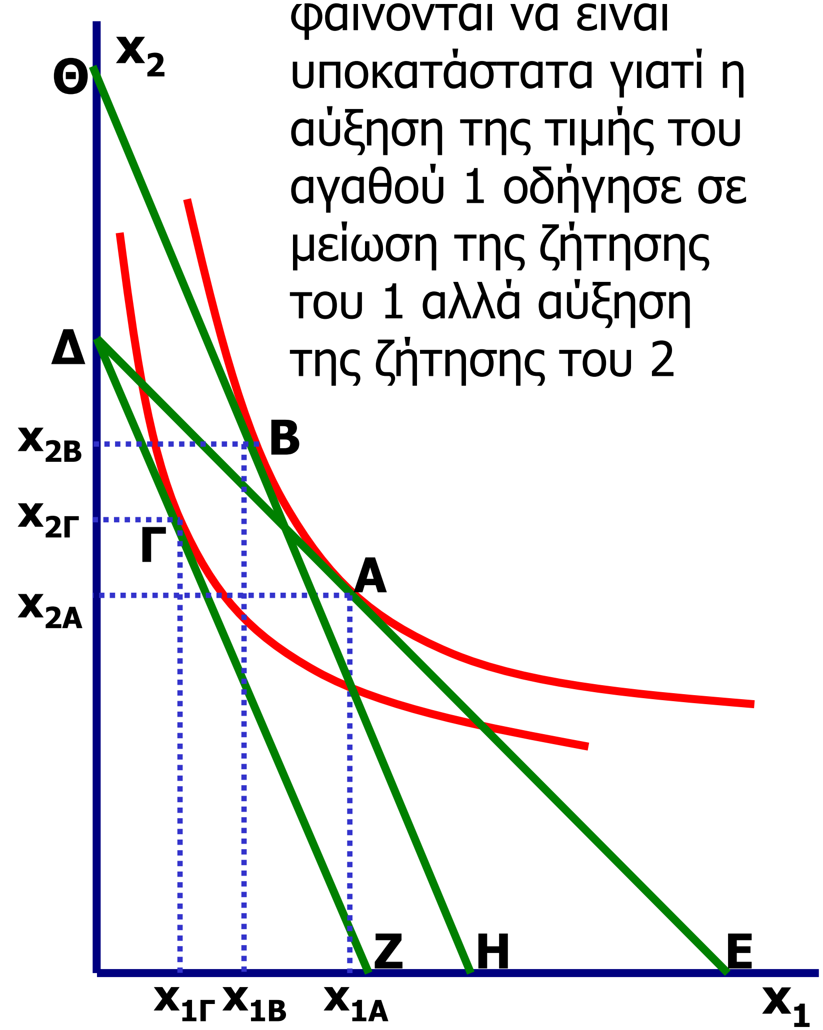
- **Α: Αρχικό σημείο για εισόδημα R και τιμές p_1 και p_2**
- **Αύξηση της τιμής του αγαθού 1 κατά Δp_1 οδηγεί σε περιστροφή της ευθείας εισοδήματος ΔΕ σε ΔΖ, οπότε το νέο βέλτιστο σημείο είναι το Γ. Εύλογα στο σημείο αυτό η ζήτηση του αγαθού 1 είναι αυξημένη σε σχέση με το Α. Αυξάνουμε το εισόδημα κατά ΔR όσο χρειάζεται ώστε παρά την αύξηση της τιμής το επίπεδο της χρησιμότητας να παραμείνει όσο ήταν και στο σημείο Α (ΔR το εισόδημα που αντισταθμίζει την απώλεια χρησιμότητας). Από το σημείο Γ, η αύξηση του εισοδήματος κατά ΔR οδηγεί σε παράλληλη μετατόπιση της ευθείας εισοδήματος από τη ΔΖ στην ΘΗ, τόσο ώστε να εφάπτεται της καμπύλης αδιαφορίας στο οποίο βρισκόταν το σημείο Α. Τότε το νέο βέλτιστο είναι το Β. Λόγω εισοδήματος, στο σημείο αυτό η ζήτηση του αγαθού 1 είναι αυξημένη σε σχέση με το σημείο Γ. Συνολικά, η επίπτωση της μεταβολής της τιμής χωρίζεται σε δύο μεταβολές ως εξής:**

  $x_{1,\Gamma}-x_{1,A}=(x_{1,B}-x_{1,A})-(x_{1,B}-x_{1,\Gamma})$ όπου ο πρώτος όρος είναι η επίπτωση υποκατάστασης και ο δεύτερος είναι η επίπτωση από το εισόδημα

Μελέτη υποκαταστασιμότητας αγαθών



Τα δύο αγαθά φαίνονται να είναι συμπληρωματικά γιατί η αύξηση της τιμής του αγαθού 1 οδήγησε στη μείωση της ζήτησης και των δύο



Τα δύο αγαθά φαίνονται να είναι υποκατάστατα γιατί η αύξηση της τιμής του αγαθού 1 οδήγησε σε μείωση της ζήτησης του 1 αλλά αύξηση της ζήτησης του 2

Η σχέση του Slutsky

Έστω συνάρτηση ζήτησης $x = f(R,p)$ και Δp η μεταβολή της τιμής. Τότε η μεταβολή της ζήτησης είναι $\Delta x = f(R,p+\Delta p) - f(R,p)$ απ' όπου προκύπτει

$$\Delta x = f(R,p+\Delta p) - f(R,p) = [f(R+\Delta R,p+\Delta p) - f(R,p)] - [f(R+\Delta R,p+\Delta p) - f(R,p+\Delta p)]$$

όπου ΔR είναι η μεταβολή του εισοδήματος που απαιτείται ώστε να ισχύει

$$U[f(R+\Delta R,p+\Delta p)] = U[f(R,p)] \text{ η οποία επιλύεται ως προς } \Delta R$$

Θέτουμε $\quad \Delta x^S = f(R+\Delta R,p+\Delta p) - f(R,p)$ επίπτωση υποκατάστασης

$\quad \Delta x^R = f(R+\Delta R,p+\Delta p) - f(R,p+\Delta p)$ επίπτωση εισοδήματος

$$\Delta x = \Delta x^S - \Delta x^R \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{\Delta x^S}{\Delta p} - \frac{\Delta x^R}{\Delta p}$$

Επίσης $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta R = x\Delta p$ (αποδείξτε το)

Άρα $\quad \dfrac{\Delta x}{\Delta p} = \left.\dfrac{\Delta x}{\Delta p}\right|_{U\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}} - x \left.\dfrac{\Delta x}{\Delta R}\right|_{p+\Delta p\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}}$ η σχέση του Slutsky.

Δηλαδή $\quad \dfrac{\Delta x}{\Delta p} = \left.\dfrac{\partial h(U,p)}{\partial p}\right|_{U\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}} - x\left.\dfrac{\partial f(R,p+\Delta p)}{\partial R}\right|_{p+\Delta p\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}}$

$h(U,p)$ η αντισταθμιστική συνάρτηση ζήτησης και $f(R,p)$ η κανονική συνάρτηση ζήτησης

Ελαστικότητες και σχέση Slutsky

Διαιρώντας με x και πολλαπλασιάζοντας με p τη σχέση $\frac{\Delta x}{\Delta p} = \left.\frac{\partial h(U,p)}{\partial p}\right|_{U\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}} - x\left.\frac{\partial f(R,p+\Delta p)}{\partial R}\right|_{p+\Delta p\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}}$

$$\frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{\partial h / h}{\partial p / p} - \frac{px}{R}\frac{\partial f / f}{\partial R / R}$$ η οποία γράφεται $\varepsilon_{11} = \xi_{11} - \alpha_1 \eta_1$

Αυτή εξηγεί γιατί η κλιση της αντισταθμιστικής συνάρτησης ζήτησης είναι μεγαλύτερη (πιο απότομη) της κλισης της κανονικής συνάρτησης ζήτησης.

Γενικευμένη σχέση Slutsky $\frac{\Delta x_i}{\Delta p_j} = \left.\frac{\partial h_i(U;p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_j}\right|_{U\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}} - x_j \left.\frac{\partial f_i(R;p_1,\ldots,p_j+\Delta p_j,\ldots,p_n)}{\partial R}\right|_{p\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$

Σε μορφή ελαστικοτήτων $\quad \varepsilon_{ij} = \xi_{ij} - a_j \eta_i \quad \forall i, j = 1,\ldots,n$

Γενικευμένες σχέσεις μεταξύ των ελαστικοτήτων

$$a_1\varepsilon_{1j} + \ldots + a_i\varepsilon_{ij} + \ldots + a_n\varepsilon_{nj} = -a_j \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

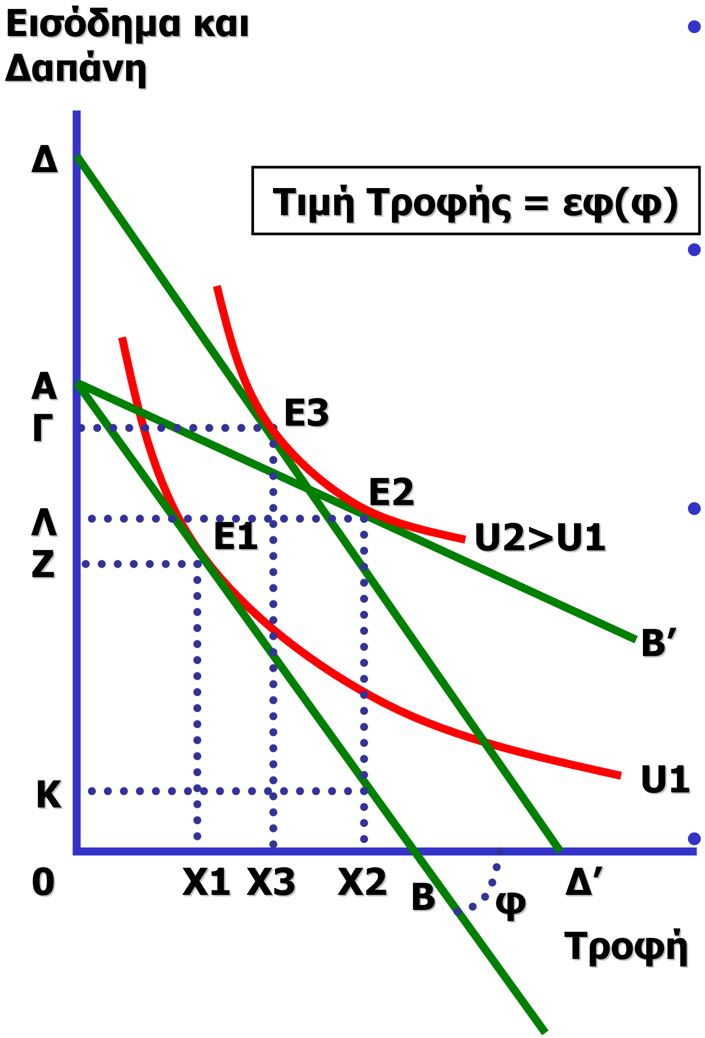
$$a_1\xi_{1j} + \ldots + a_i\xi_{ij} + \ldots + a_n\xi_{nj} = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$a_1\eta_1 + \ldots + a_i\eta_i + \ldots + a_n\eta_n = 1 \text{ και } a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_n = 1$$

$$\xi_{i1} + \ldots + \xi_{ij} + \ldots + \xi_{in} = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

$$\varepsilon_{i1} + \ldots + \varepsilon_{ij} + \ldots + \varepsilon_{in} = -\eta_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

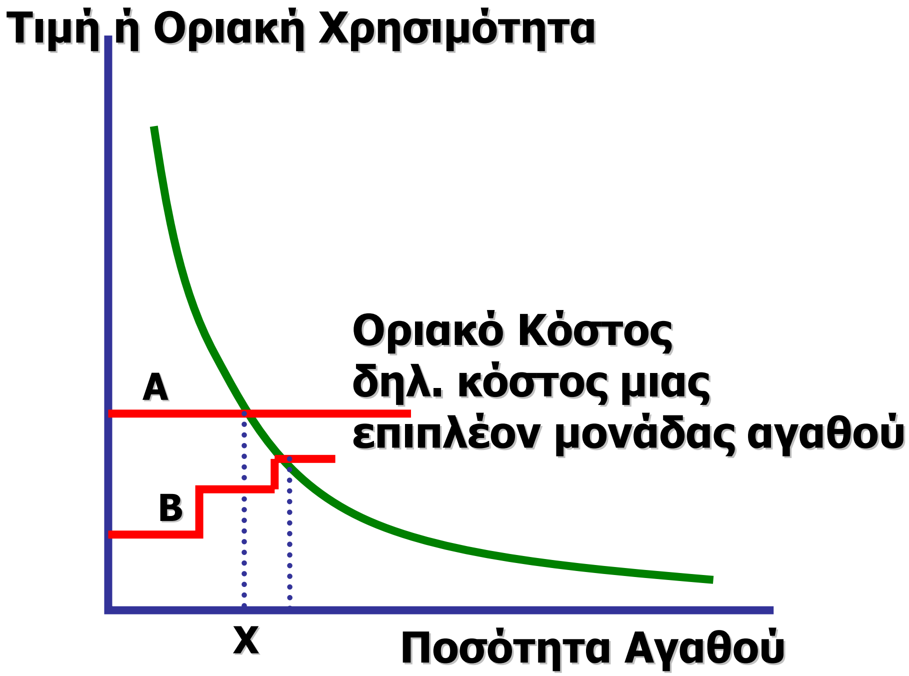
Εφαρμογές της σχέσης Slutsky



- Κυβέρνηση εξετάζει κατά πόσον πρέπει να επιδοτήσει την τιμή της τροφής ή να παράσχει πρόσθετο εισόδημα προκειμένου να αυξηθεί το επίπεδο διατροφής του πληθυσμού
- Ας θεωρηθεί ότι εκτός της τροφής όλα τα άλλα αγαθά θεωρούνται ως ενιαίο αγαθό με τιμή κανονικοποιημένη στη μονάδα. Αρχικό βέλτιστο είναι το Ε1 στο οποίο η ποσότητα τροφής είναι Χ1, η ευθεία εισοδήματος είναι η ΑΒ και το μέγεθος του εισοδήματος είναι ίσο με το μήκος 0Α. Για την τροφή δαπανά όσο το μήκος ΑΖ.
- Η επιδότηση της τιμής της τροφής σημαίνει μείωση της τιμής της δηλαδή στροφή της ευθείας εισοδήματος από ΑΒ σε ΑΒ′ η οποία εφάπτεται καμπύλης αδιαφορίας με αυξημένο επίπεδο χρησιμότητας. Νέο βέλτιστο το σημείο Ε2 στο οποίο η ποσότητα τροφής είναι Χ2 μεγαλύτερη της Χ1. Για την τροφή δαπανά όσο το μήκος ΑΛ, αλλά το κράτος δαπανά ΛΚ=ΑΚ-ΑΛ για την επιδότηση της τιμής της τροφής.
- Για να είναι συγκρίσιμες οι δύο πολιτικές, η επιδότηση του εισοδήματος γίνεται όσο χρειάζεται ώστε το επίπεδο χρησιμότητας να είναι ίδιο με αυτό που επετεύχθη από την επιδότηση της τιμής της τροφής. Η κλίση της νέας ευθείας εισοδήματος ΔΔ′ είναι βέβαια ίδια με αυτήν της αρχικής ΑΒ. Το νέο βέλτιστο είναι το Ε3 στο οποίο η κατανάλωση τροφής είναι Χ3 η οποία είναι μεγαλύτερη της Χ1. Η δαπάνη για τροφή είναι ΔΓ αλλά ο καταναλωτής δαπανά ΑΓ και το κράτος δαπανά ΔΑ=ΔΓ-ΑΓ.
- Οι δύο πολιτικές αξιολογούνται ως εξής: Πολιτική επιδότησης τιμής οδηγεί σε όφελος Χ2-Χ1 με κόστος ΚΛ, Πολιτική επιδότησης εισοδήματος οδηγεί σε όφελος Χ3-Χ1 με κόστος ΔΑ. Από τη συγκριτική στάθμιση οφέλους και κόστους, π.χ. από τη σύγκριση των (Χ2-Χ1)/ΛΚ και του (Χ3-Χ1)/ΔΑ τα οποία εκφράζουν την απόδοση της πολιτικής ανά μονάδα δαπάνης του κράτους, προκύπτει η καλύτερη πολιτική.

Φθίνουσα Οριακή Χρησιμότητα

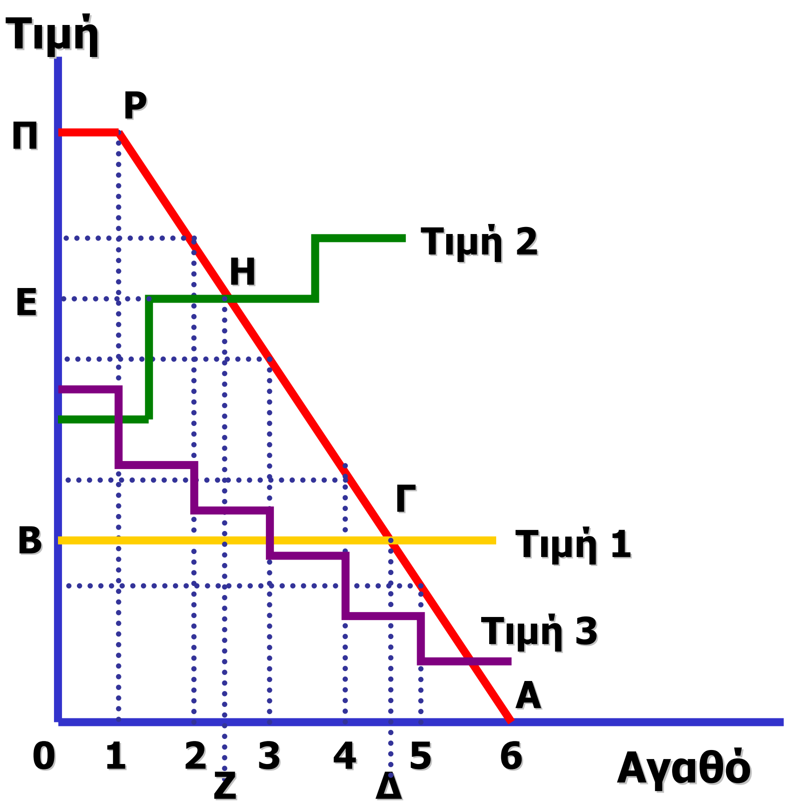
- Η συνάρτηση ζήτησης για σταθερό εισόδημα συνδέει την βέλτιστη ποσότητας ζήτησης αγαθού με την τιμή του αγαθού αυτού
- Η συνάρτηση ζήτησης μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως συνάρτηση της οριακής χρησιμότητας ως προς την ποσότητα ζήτησης του αγαθού, δηλαδή ως η μεταβολή της χρησιμότητας όταν αυξάνεται η ποσότητα της κατανάλωσης αγαθού.
- Λόγω της υπόθεσης ότι η συνάρτηση χρησιμότητας δεν είναι κυρτή και επομένως η συνάρτηση ζήτησης είναι φθίνουσα, η οριακή χρησιμότητα μειώνεται με την αύξηση της κατανάλωσης αγαθού, δηλαδή η επιπλέον χρησιμότητα από μία επιπλέον μονάδα κατανάλωσης είναι μικρότερη από την επιπλέον χρησιμότητα που επετεύχθη με την κατανάλωση της προηγούμενης μονάδας.



- Το οριακό κόστος της κατανάλωσης είναι το κόστος για τον καταναλωτή από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας αγαθού
- Αν η αγορά γίνεται σε σταθερή τιμή (όπως η ευθεία A) το οριακό κόστος είναι σταθερό
- Αν η τιμή αγοράς αυξάνει με την αύξηση της κατανάλωσης (όπως η καμπύλη B) το οριακό κόστος είναι αύξων
- Η βέλτιστη κατανάλωση του αγαθού είναι η ποσότητα X που προσδιορίζεται από την τομή της συνάρτησης ζήτησης (ή οριακής χρησιμότητας) και του οριακού κόστους
- **ΜΕΛΕΤΕΣ ΚΟΣΤΟΥΣ-ΟΦΕΛΟΥΣ**

Θέληση για Πληρωμή

- Η συνάρτηση ζήτησης εκφράζει τη θέληση του καταναλωτή να πληρώσει όλο και λιγότερα για κάθε επιπλέον μονάδα του αγαθού που καταναλώνει
- Πληρώνει βέβαια σύμφωνα με την τιμολόγηση που ισχύει



- **Θεωρητικά είναι διατεθειμένος να πληρώσει το εμβαδόν 0ΠΡΑ για να καταναλώσει 6 μονάδες αγαθού**
- **Αν η τιμολόγηση είναι σε ενιαία τιμή (όπως η Τιμή 1), τότε πληρώνει 0ΒΓΔ και εξοικονομεί ΒΠΡΓ.**
- **Αν η τιμολόγηση είναι σε κλιμακωτή μορφή αλλά τελικά σε ενιαία τιμή (όπως η τιμή 2), τότε πληρώνει ΕΗΖ0 και εξοικονομεί ΠΡΗΕ**
- **Αν η τιμολόγηση είναι κατά τμήματα και εφαρμόζεται κατά τμήματα, τότε το εμβαδόν που εξοικονομεί είναι μικρότερο της περίπτωσης της ενιαίας τιμής (τιμή 3). Το ίδιο ισχύει αν η τιμή έχει πάγιο στοιχείο.**

Άσκηση: Τιμολόγηση ηλεκτρισμού

- Προκειμένου να μειωθεί η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας κατά τις ώρες αιχμής φορτίου, ηλεκτρική εταιρεία εφαρμόζει τιμολόγηση σε πραγματικό χρόνο.
- Προσδιορίζεται ένα βασικό επίπεδο κατανάλωσης ηλεκτρισμού για κάθε καταναλωτή.
- Σε μία ημέρα αιχμής, ο καταναλωτής πληροφορείται ηλεκτρονικά ότι αυξάνεται η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας.
- Αν ο καταναλωτής, βάσει μέτρων εξοικονόμησης ηλεκτρισμού, καταφέρει κατά την ημέρα αιχμής να μην αυξήσει την κατανάλωσή του από το βασικό του επίπεδο, η ηλεκτρική εταιρεία του επιστρέφει χρήματα που αναλογούν στη μείωση της κατανάλωσης τιμολογημένα στο επίπεδο της αυξημένης τιμής.
- Μελετήστε την τιμολογιακή αυτή πολιτική, σχετικά με τις επιπτώσεις της στην κατανάλωση ηλεκτρισμού και στο επίπεδο χρησιμότητας των καταναλωτών, καθώς και σχετικά με το κόστος για την ηλεκτρική εταιρεία.

Άσκηση: Φορολογία στη Βενζίνη

- Προκειμένου να μειωθεί η κατανάλωση βενζίνης, το κράτος αποφασίζει να φορολογήσει τη βενζίνη με βάση προσθετικό φόρο (ειδικό φόρο κατανάλωσης).
- Προκειμένου να μην επιβαρύνει τον καταναλωτή, το κράτος αποφασίζει επίσης να επιστρέψει το σύνολο των εσόδων από την επιπλέον φορολογία με τη μορφή επιδότησης του εισοδήματος.
- Μελετήστε την επίπτωση των μέτρων αυτών στην κατανάλωση βενζίνης και στο επίπεδο χρησιμότητας των καταναλωτών.
- Αναλύστε την ευαισθησία των συμπερασμάτων σας για διάφορες περιπτώσεις ελαστικότητας τιμής και ελαστικότητας εισοδήματος της βενζίνης.

❖ Θεωρήστε εναλλακτικά ότι η φορολογία της βενζίνης γίνεται για εισπρακτικούς λόγους. Κατασκευάσατε συνάρτηση που συνδέει το ύψος των φορολογικών εσόδων με το επίπεδο φορολογίας της βενζίνης και αναλύστε γραφικά τη μορφή της (καμπύλη Laffer). Ποιο είναι το βέλτιστο επίπεδο φορολογικού συντελεστή για τις φορολογικές αρχές; Υποθέστε διαφορετικές ελαστικότητες τιμής της βενζίνης καθώς και την περίπτωση πλήρους υποκατάστατου της βενζίνης για τιμή βενζίνης που υπερβαίνει κάποιο όριο.

Άσκηση: Προστασία του περιβάλλοντος

- Έστω καταναλωτής ο οποίος εξετάζει τη σκοπιμότητα υιοθέτησης σειράς υποψηφίων μέτρων εξοικονόμησης της ενέργειας που καταναλώνει.
- Κάθε μέτρο είναι ανεξάρτητο του άλλου και αντιπροσωπεύει διαφορετική δαπάνη ανά μονάδα εξοικονομούμενης ενέργειας.
- Η χρησιμότητα του καταναλωτή από την εξοικονόμηση ενέργειας εκφράζεται ως προς την βελτίωση του περιβάλλοντος η οποία προκύπτει από τη συνολική εξοικονόμηση ενέργειας.
- Η οριακή χρησιμότητα φθίνει αυξανομένης της εξοικονόμησης ενέργειας.
- Καταστρώστε το πρόβλημα απόφασης του καταναλωτή και αναλύστε με γραφικό τρόπο πώς ο καταναλωτής θα προσδιορίσει ποια μέτρα εξοικονόμησης ενέργειας πρέπει να υιοθετήσει

Άσκηση: Προσφορά εργασίας

- Καταναλωτής διαθέτει εισόδημα M που δεν προέρχεται από την εργασία του και γνωρίζει ότι η μέση τιμή αγοράς των καταναλωτικών αγαθών είναι p καθώς και η μέση μοναδιαία αμοιβή της εργασίας είναι w.
- Δεδομένου ότι διαθέτει περιορισμένο χρόνο ημερησίως 24 ωρών, αναρωτιέται πώς πρέπει να κατανείμει το χρόνο του μεταξύ χρόνου εργασίας και υπόλοιπου χρόνου (λέγεται χρόνος διασκέδασης).
- Καταστρώστε το πρόβλημα απόφασης, μελετήστε τον προσδιορισμό του βαθμού οριακής υποκατάστασης μεταξύ χρόνου εργασίας και χρόνου διασκέδασης, διατυπώστε την ανάλογη εξίσωση του Slutsky και κατασκευάσατε συνάρτηση προσφοράς εργασίας ανάλογα με το επίπεδο της μοναδιαίας αμοιβής της.

Άσκηση: Συνάρτηση ζήτησης

- Θεωρήστε μία γραμμική συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού ως προς την τιμή του αγαθού και μελετήστε γραφικά και αλγεβρικά τα εξής:
  - Ελαστικότητα τιμής για διάφορα επίπεδα τιμής
  - Συνάρτηση δαπάνης για διάφορα επίπεδα τιμής
  - Κλίση της συνάρτησης δαπάνης σε σχέση με την κλίση της συνάρτησης ζήτησης
  - Ορίσατε την οριακή δαπάνη και συνδέστε τη με την ελαστικότητα τιμής
- Θεωρήστε μία συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού η οποία έχει την κατάλληλη αλγεβρική μορφή ώστε η ελαστικότητα τιμής να είναι σταθερή για όλα τα επίπεδα της τιμής του αγαθού.
  - Μελετήστε τη συνάρτηση δαπάνης σε σχέση με τη συνάρτηση ζήτησης, καθώς και την οριακή δαπάνη και τη σχέση της με την ελαστικότητα τιμής.

Άσκηση: Πρόβλεψη ζήτησης ενέργειας

- Θεωρήστε ότι η πιο κατάλληλη συνάρτηση ζήτησης ενέργειας ως προς το ΑΕΠ μιας χώρας είναι αυτή που έχει σταθερή ελαστικότητα ως προς το ΑΕΠ για οποιοδήποτε επίπεδο του ΑΕΠ. Διαθέτουμε στατιστικά δεδομένα για ένα έτος σχετικά με την ετήσια κατανάλωσης ενέργειας και το ΑΕΠ μιας ομάδας από 50 χώρες. Με ποια διαδικασία και στατιστική μέθοδο θα λάβουν αριθμητικές τιμές οι παράμετροι της συνάρτηση ζήτησης και πώς θα εφαρμοσθεί για μία άλλη χώρα για την οποία γνωρίσουμε το ΑΕΠ προκειμένου να προβλεφθεί η κατανάλωση ενέργειας.
- Το ίδιο ερώτημα για συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή της ενέργειας με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση ζήτησης έχει ελαστικότητα τιμής σταθερή για όλα τα επίπεδα τιμών της ενέργειας.
- Το ίδιο ερώτημα για συνάρτηση ζήτησης που συνδυάζει το ΑΕΠ και την τιμή της ενέργειας. Θεωρήστε με βάση τη συνάρτηση αυτή ότι για μία χώρα εισαγωγής ενέργειας διπλασιάζεται η τιμή της ενέργειας και ότι η επιπλέον δαπάνη για ενέργεια αφαιρείται από το επίπεδο του ΑΕΠ γιατί καταβάλλεται σε παραγωγούς ενέργειας οι οποίοι είναι εκτός της χώρας. Ποιες οι επιπτώσεις στην κατανάλωση ενέργειας και στο ΑΕΠ; Αναλύστε την ευαισθησία της απάντησης για διάφορες τιμές των ελαστικοτήτων. Συγκρίνατε τις επιπτώσεις με χώρα η οποία είναι παραγωγός ενέργειας.

Εισόδημα και Ελεύθερος Χρόνος

Με δεδομένο μισθό r ο καταναλωτής αποφασίζει μεταξύ εισοδήματος y και ελεύθερου χρόνου L

$Max \quad U = g(L, y)$ η συνάρτηση χρησιμότητας

$s.t. \quad L + W = T$ ο περιορισμός διαθέσιμου χρόνου T όπου W ο χρόνος εργασίας

$y = r \cdot W$ ο περιορισμός εισοδήματος

Άγνωστοι L, y, W

Επομένως $Max\, U = g(T - W, rW)$ με άγνωστο το χρόνο εργασίας W

$$\frac{dU}{dW} = -\frac{\partial g}{\partial L} + \frac{\partial g}{\partial y} r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad RCS = -\frac{dy}{dL} = \frac{\frac{\partial g}{\partial L}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = r$$

Άρα στο βέλτιστο, ο βαθμός υποκατάστασης μεταξύ εργασίας και ελεύθερου χρόνου είναι ίσος με το μισθό (εισόδημα ανά μονάδα χρόνου εργασίας).

Δείκτες κόστους ζωής και τιμάριθμος

Συγκρίνουμε δύο χρονικές στιγμές : 0 και t κατά τις οποίες

Εισόδημα y_0, y_t Κατανάλωση $q_{i,0}, q_{i,t}$ Τιμές $p_{i,0}, p_{i,t}$ Αγαθά $i = 1,\dots, N$

Συνολική Δάπάνη $y_0 = \sum_i q_{i,0} p_{i,0}$ $y_t = \sum_i q_{i,t} p_{i,t}$

Δείκτης Μεταβολής Συνολικής Δαπάνης $I_y = \left(\frac{y_t}{y_0}\right) \times 100$

Δείκτης κατά Laspeyres $L = \left(\frac{\sum_i q_0 p_t}{\sum_i q_0 p_0}\right) \times 100$ όπου διατηρείται σταθερή η κατανάλωση 0

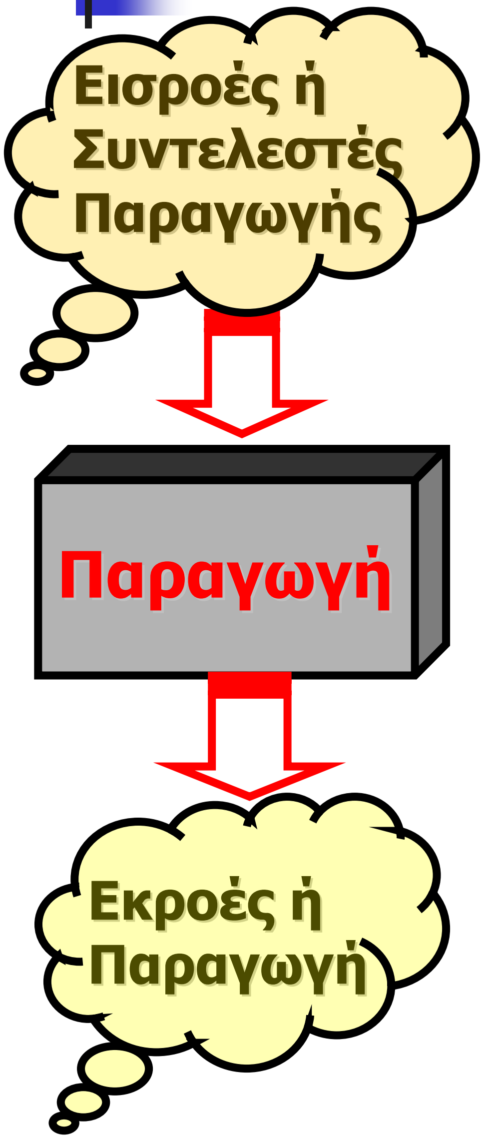
Δείκτης κατά Paasche $P = \left(\frac{\sum_i q_t p_t}{\sum_i q_t p_0}\right) \times 100$ όπου διατηρείται σταθερή η κατανάλωση t

Ο καταναλωτής έχει καλύτερη διαβίωση εάν $I_y > L$ αλλά χειρότερη εάν $I_y < P$

Θεωρία Παραγωγού

1. Αποτελεσματική τεχνολογία παραγωγής
2. Παραγωγικότητα
3. Ελαχιστοποίηση Κόστους Παραγωγής
4. Μεγιστοποίηση Παραγωγής
5. Το δυϊκό σχήμα
6. Συνάρτηση Ζήτησης Συντελεστών Παραγωγής
7. Συνάρτηση Κόστους – Μέσο και Οριακό κόστος
8. Μακροχρόνια Συνάρτηση Κόστους

Η Παραγωγή ως Μεταποίηση



- Η παραγωγή νοείται ως διαδικασία μετασχηματισμού - **μεταποίησης** αγαθών και υπηρεσιών που αγοράζει η επιχείρηση σε ένα ή περισσότερα νέα αγαθά και υπηρεσίες που πουλάει η επιχείρηση
- **Τεχνολογία** λέγεται ένας συνδυασμός ποσοτήτων Εισροών και Εκροών ο οποίος είναι τεχνικά **εφικτός**
- Ο Παραγωγός είναι ο **αποφασίζων** για την παραγωγή
- Διενεργεί την παραγωγή επειδή προσδοκά ότι η Αξία των Εκροών είναι λόγω της Μεταποίησης μεγαλύτερη της Αξίας των Εισροών

➢ **Περιθώριο Κέρδους**: **Διαφορά μεταξύ Αξίας Εκροών και Αξίας Εισροών**

Η Παραγωγή ως Μεταποίηση

Εισροές

$\{x_i, i = 1,\ldots,N\}$

$\downarrow$

Μετασχηματισμός

$$\{x_i, \forall i\} \xrightarrow{f \in \Re^N \times \Re^M} \{q_j, \forall j\}$$

$\downarrow$

Εκροές

$\{q_j, j = 1,\ldots,M\}$

- **Οι ποσότητες Εισροών και Εκροών δεν γίνονται απόθεμα, οι Εισροές καταναλώνονται με τη μεταποίηση και οι Εκροές πωλούνται**
- **Το Κεφάλαιο (π.χ. ο εξοπλισμός) νοείται ως Εισροή με την έννοια του μέρους το οποίο φθείρεται, αναλώνεται, κατά τη μεταποίηση (Η επένδυση δεν είναι εισροή)**
- **Δαπάνη παραγωγής ή Κόστος (λογιστικό) είναι η αξία αγοράς όλων των Εισροών**
- **Είσπραξη (Εισόδημα ή τζίρος) από την παραγωγή είναι η αξία της πώλησης των Εκροών**
- **Περιθώριο Κέρδους = Είσπραξη-Δαπάνη**
- **Η Εργασία και το Κεφάλαιο είναι δύο συντελεστές παραγωγής (εισροές)**
- **Προστιθέμενη Αξία της Μεταποίησης είναι η διαφορά μεταξύ της Είσπραξης και της Δαπάνης χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι δαπάνες για την εργασία και το κεφάλαιο**
- **Άρα η Προστιθέμενη Αξία αντιστοιχεί στην αμοιβή της εργασίας και του κεφαλαίου, δηλαδή αποτελεί εισόδημα των εργαζομένων και των κεφαλαιούχων το οποίο δαπανούν για αγορά αγαθών και υπηρεσιών ως καταναλωτές (Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν)**

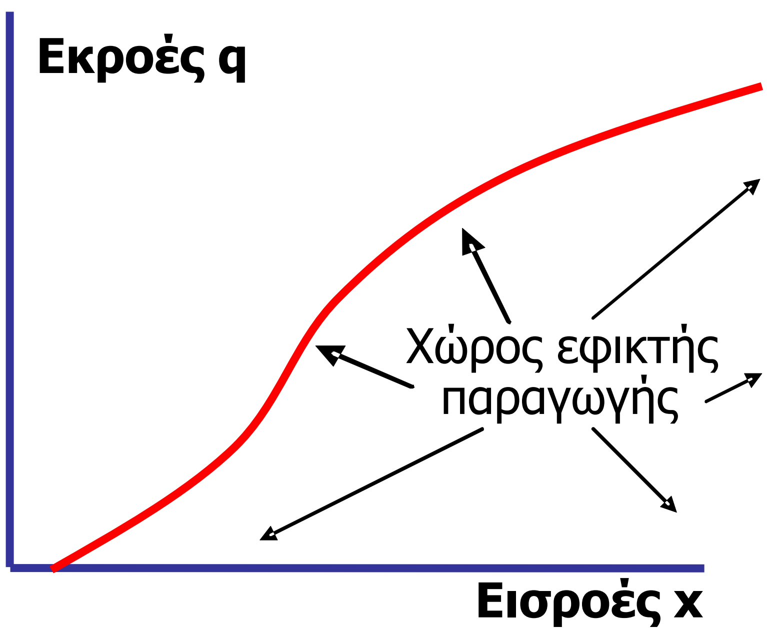
Η Απεικόνιση της Παραγωγής

Τεχνολογία

$$\left(x_1,\ldots,x_N;q_1,\ldots.,q_M\right)\in\Re^N\times\Re^M$$

η οποία είναι εφικτή (δηλαδή ανήκει) στον μετασχηματισμό (μεταποίηση) f

$$x\in\Re^N \xrightarrow{f} q\in\Re^M$$



Αξιώματα για την f

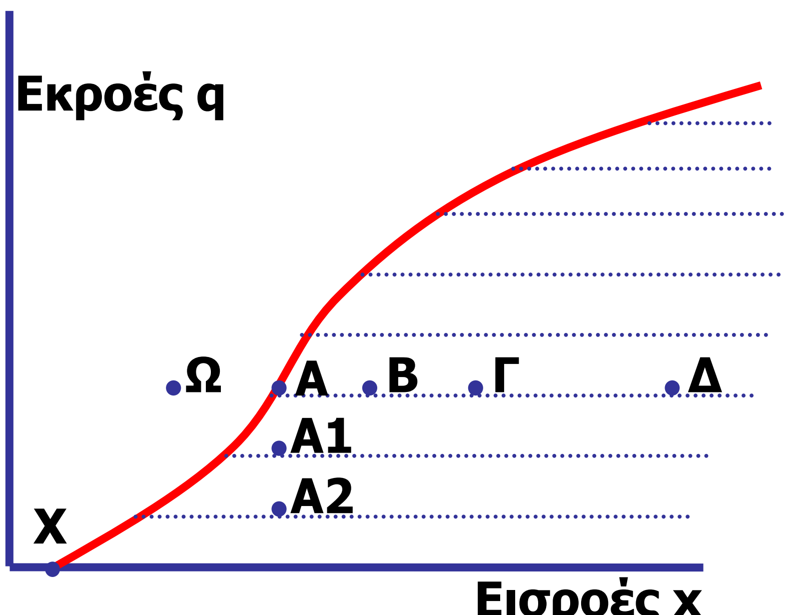
- Μη Φθίνουσα (αυξανομένου του x το q δεν μειώνεται)
- Ο χώρος των εφικτών τεχνολογιών
  - Είναι Κυρτός
  - Δεν είναι άνω φραγμένος ως προς τις εισροές
  - Είναι άνω φραγμένος ως προς τις εκροές για δεδομένες εισροές
  - Είναι κάτω φραγμένος στις εισροές
- Το σύνορο του χώρου (δηλαδή η μεγίστη εκροή για δεδομένη εισροή) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω μετά από κάποια ποσότητα εισροών

Η Απεικόνιση της Παραγωγής

Αν Τεχνολογία είναι εφικτή τότε εφικτή είναι κάθε Τεχνολογία που χρησιμοποιεί μεγαλύτερη ποσότητα Εισροών χωρίς απαραίτητα να αυξάνει η Εκροή

$$\text{Αν } (x;q) \in f \subseteq \Re^N \times \Re^M$$

$$\text{Τότε } (y;q) \in f \quad \text{με} \quad y \geq x$$

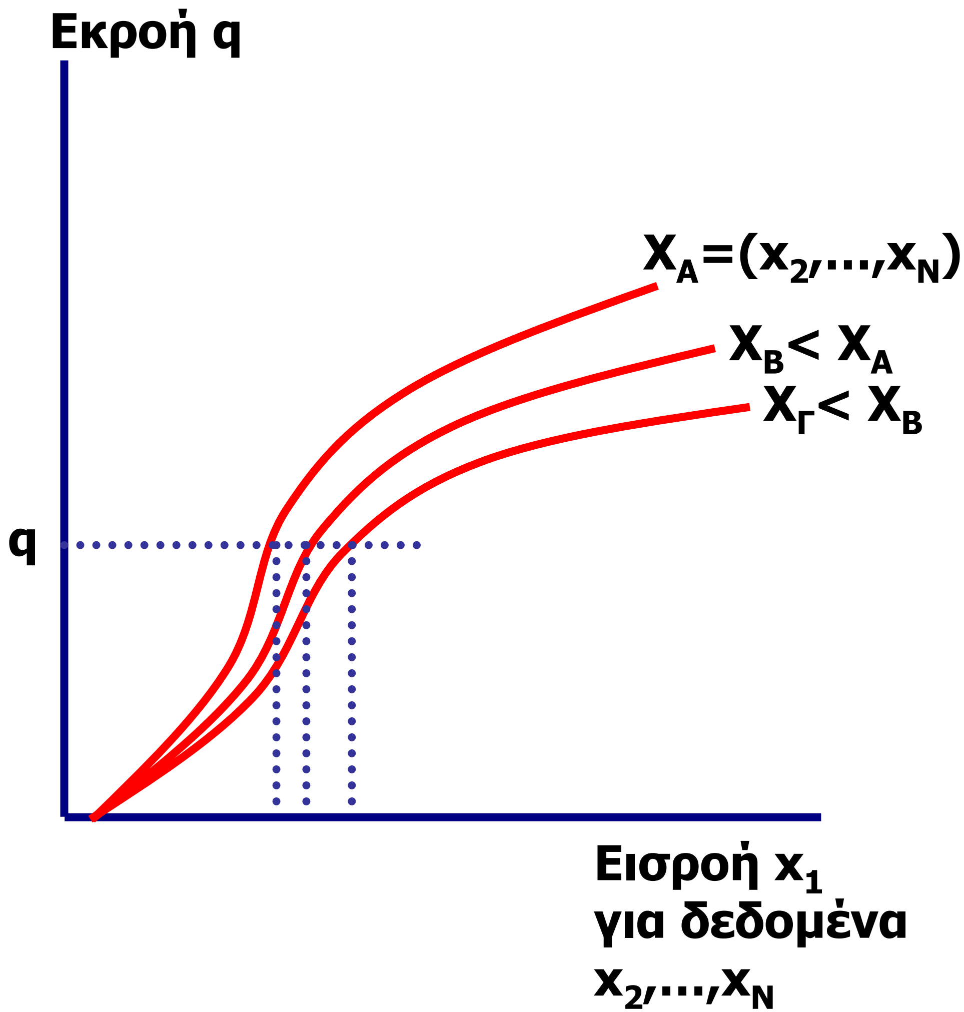


Ερμηνεία των Σημείων

- Αν **B** εφικτό τότε εφικτές και οι **Γ** και **Δ**
- **A** η τεχνολογία με την ελαχίστη εισροή για δεδομένο μέγεθος εκροής
- Αν **A1** εφικτή τότε και **A2** εφικτή εφόσον η εκροή δεν γίνεται αρνητική
- **A** η τεχνολογία με τη μεγίστη εκροή για δεδομένο μέγεθος εισροής
- **Ω** μη εφικτή τεχνολογία
- **X** η τεχνολογία με την ελάχιστη απαραίτητη εισροή ώστε να υπάρχει κάποια ελάχιστη εκροή

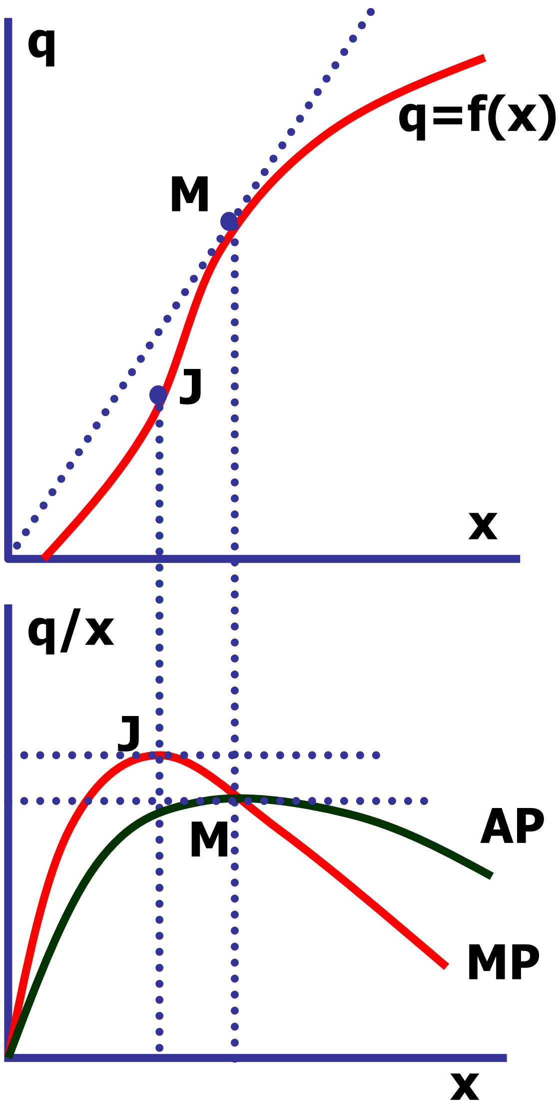
- Ο γεωμετρικός τόπος των τεχνολογιών **A** λέγεται Σύνορο Αποτελεσματικών Τεχνολογιών → Συνάρτηση Παραγωγής

Σύνορο Αποτελεσματικών Τεχνολογιών



Ολική Παραγωγικότητα
Συντελεστή Παραγωγής x_i
Μεγίστη Παραγωγή q
από κάθε ποσότητα x_i
με δεδομένες τις ποσότητες
των άλλων συντελεστών
Δηλαδή $q = f\left(x_i;\bar{x}_j, \forall j \neq i\right)$
όπου f η συνάρτηση παραγωγής

Παραγωγικότητα Συντελεστών Παραγωγής



Μέση Παραγωγικότητα $AP_i = \frac{q}{x_i} = \frac{f\left(x_i; x_j^0, \forall j \neq i\right)}{x_i}$

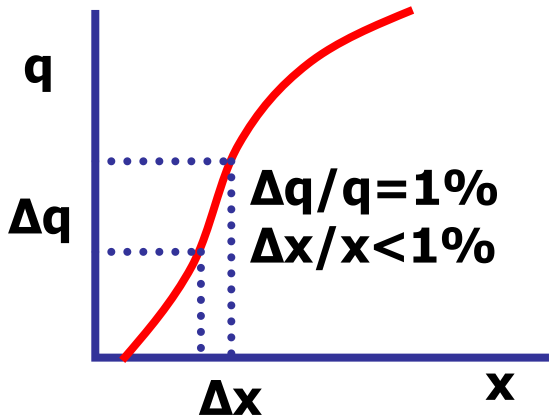
Οριακή Παραγωγικότητα $MP_i = \frac{dq}{dx_i} = \frac{\partial f\left(x_i; x_j^0, \forall j \neq i\right)}{\partial x_i}$

$$Max\ AP_i \rightarrow \frac{\partial AP_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{x_i \, \partial f / \partial x_i - f}{x_i^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f}{x_i} \Rightarrow$$

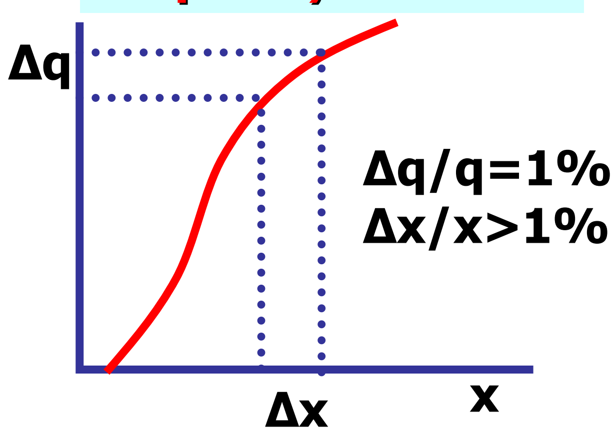
$$Max\ AP_i = MP_i$$

Παραγωγικότητα και Αποδόσεις Κλίμακας

Αύξουσα Απόδοση Κλίμακας



Φθίνουσα Απόδοση Κλίμακας



ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΟΡΙΑΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ

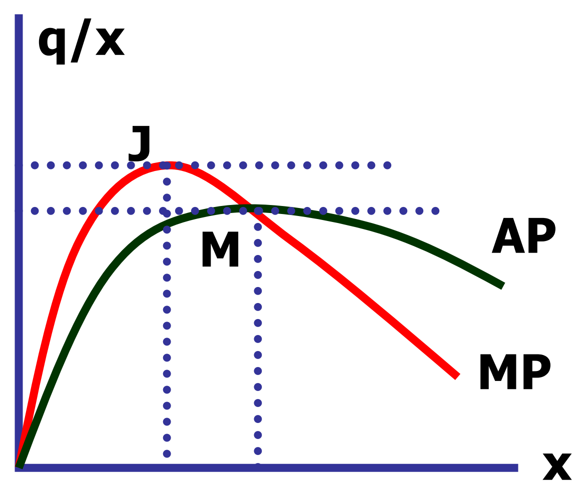
Ελαστικότητα Παραγωγής

ως προς Συντελεστή Παραγωγής

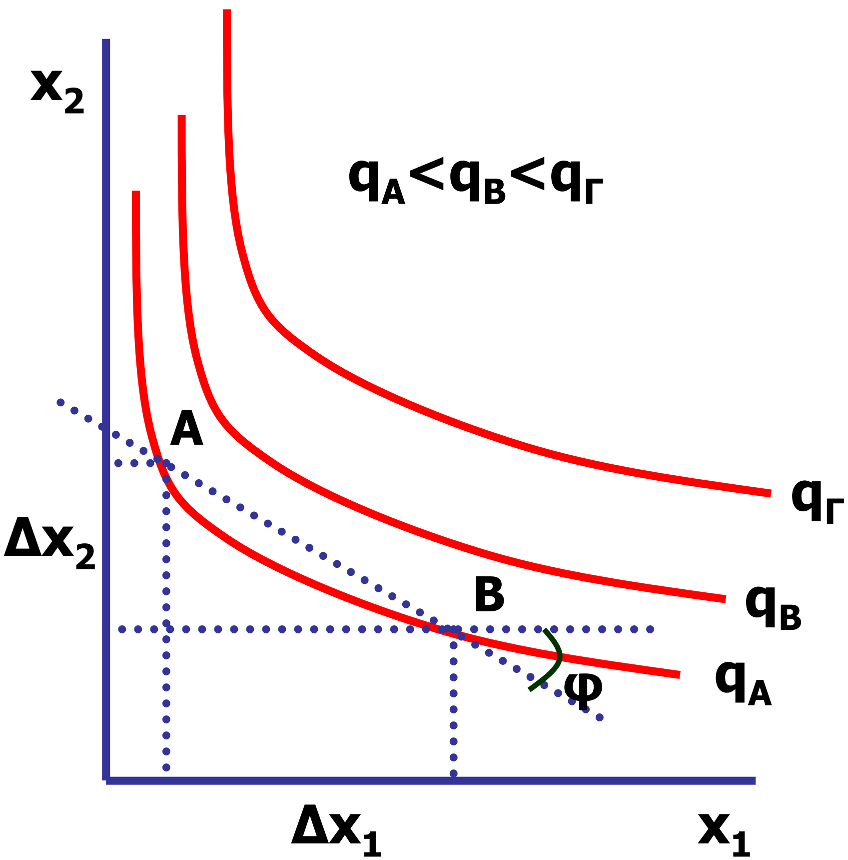
$$\omega = \frac{\Delta q / q}{\Delta x / x} = \frac{x}{q} \cdot \frac{\partial q}{x} = \frac{MP}{AP}$$

$\omega > 1$ μέχρι το x για το οποίο $MaxAP = MP$

$\omega < 1$ μετά το x για το οποίο $MaxAP = MP$



Ισόποσες Καμπύλες



Γεωμετρικός τόπος των ζευγών

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2) = \bar{q} \text{ σταθερή}$$

Υποκατάσταση $(-\Delta x_2)$ από (Δx_1)

ώστε q_A σταθερή (βλ. σημεία A και B)

Βαθμός Τεχνικής Υποκατάστασης

$$RTS = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

$$dq = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\Rightarrow RTS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = \frac{MP_1}{MP_2}$$

Φθίνων Βαθμός Τεχνικής Υποκατάστασης

Ελαστικότητα Υποκατάστασης

$$\sigma = \frac{\Delta\left(x_2/x_1\right) \big/ \left(x_2/x_1\right)}{\Delta(RTS) \big/ RTS} = \frac{\partial \ln\left(x_2/x_1\right)}{\partial \log\left(MP_1/MP_2\right)} = \frac{\partial \ln\left(x_2/x_1\right)}{\partial \ln\left(f_1/f_2\right)}$$

$$\sigma = \frac{f_1 f_2 \left(f_1 x_1 + f_2 x_2\right)}{x_1 x_2 \left(2 f_{12} f_1 f_2 - f_1^2 f_{22} - f_2^2 f_{11}\right)}$$

όπου $\quad f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \qquad f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Συναρτήσεις Παραγωγής με

σταθερή Ελαστικότητα Υποκατάστασης

Cobb - Douglas $\quad q = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$

$$\sigma = 1$$

CES $\quad q = A\left[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

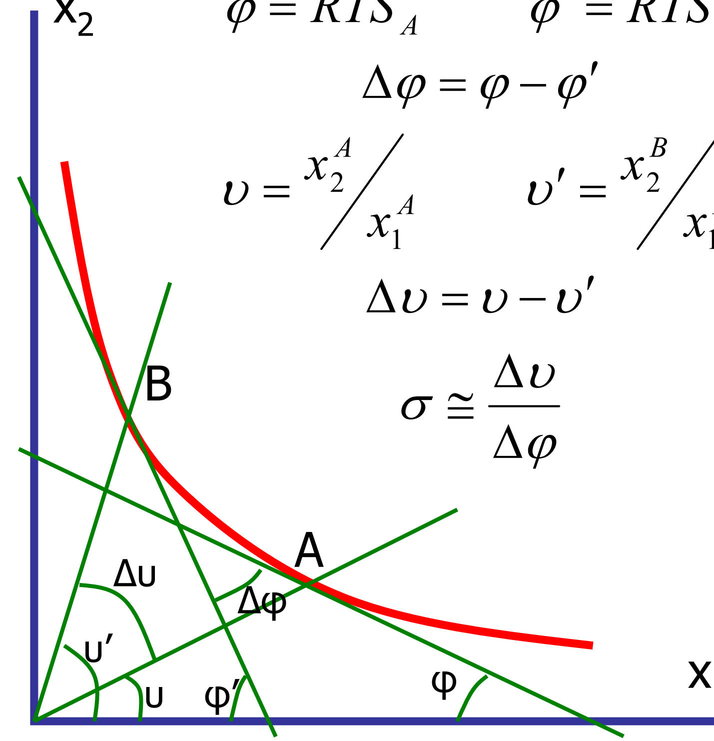
$\varphi = RTS_A \qquad \varphi' = RTS_B$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$$

$\upsilon = x_2^A / x_1^A \qquad \upsilon' = x_2^B / x_1^B$

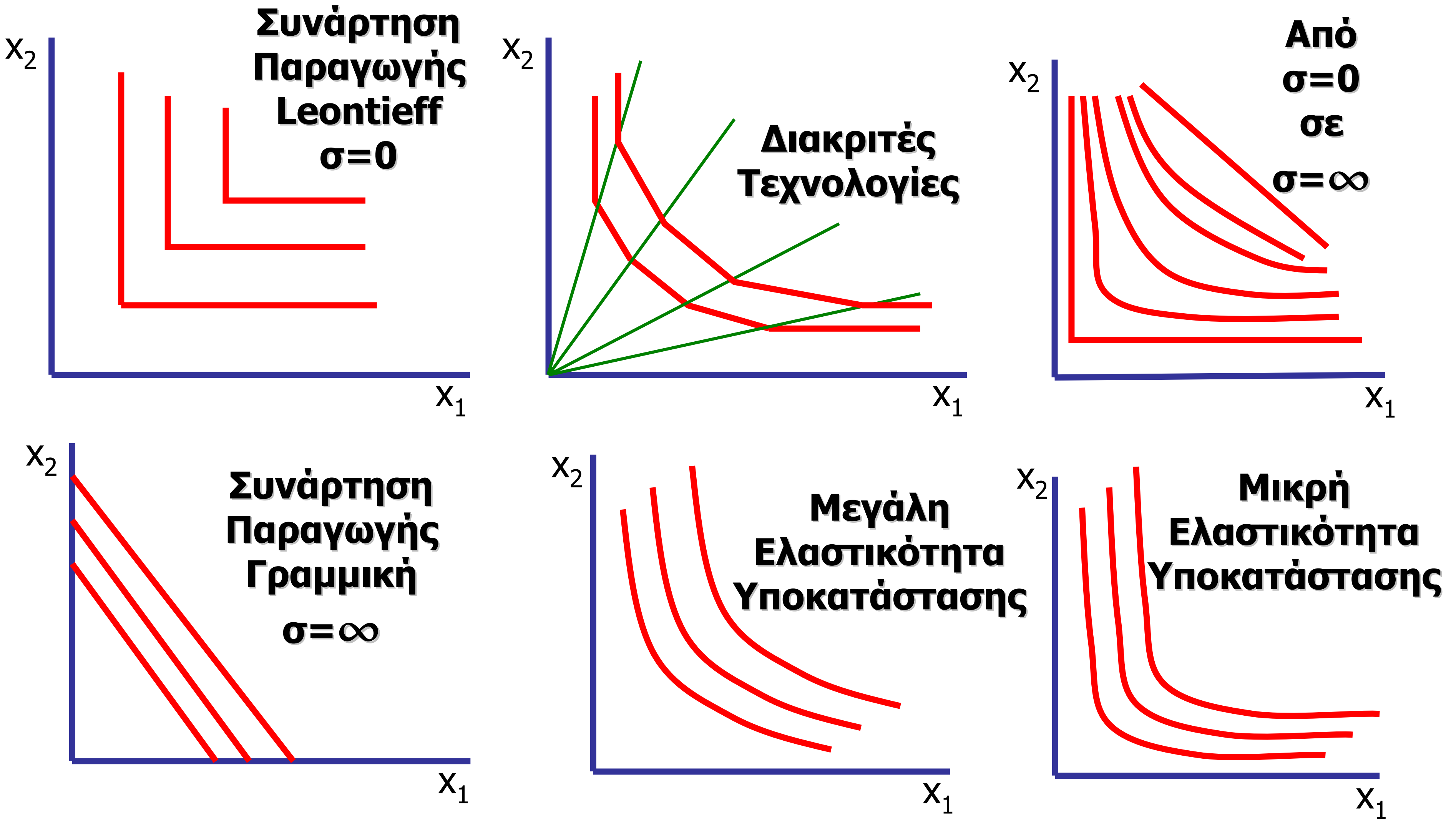
$$\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon'$$

$$\sigma \cong \frac{\Delta\upsilon}{\Delta\varphi}$$



Η σ μέτρο της καμπυλότητας Ισόποσης Καμπύλης

Ελαστικότητα Υποκατάστασης



Ομογενείς Συναρτήσεις Παραγωγής

Συνάρτηση $y = f\left(x_1,\ldots,x_N\right)$ Ομογενής βαθμού ρ αν $\lambda^{\rho} y = f\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_N\right), \forall \lambda > 0$

Θεώρημα του Euler $\rho \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Σταθερές αποδόσεις κλίμακος $\rho = 1$ $\lambda y = f\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_N\right)$ $y = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Αύξουσες αποδόσεις κλίμακος $\rho > 1$ $\lambda^{\rho} y = f\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_N\right)$ $y < \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Φθίνουσες αποδόσεις κλίμακος $\rho < 1$ $\lambda^{\rho} y = f\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_N\right)$ $y > \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Για Ομογενείς συναρτήσεις παραγωγής $\omega = \dfrac{\left(f(\lambda x) - f(x)\right) / f(x)}{\Delta\lambda / \lambda} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i$

Σταθερές αποδόσεις κλίμακος $\omega = 1$

Συνάρτηση Cobb - Douglas $y = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

αν $\alpha + \beta = 1$ σταθερές αποδόσεις κλίμακος, $\alpha + \beta < 1$ φθίνουσες, αλλοιώς αύξουσες

Ελαστικότητα Υποκατάστασης της Cobb - Douglas $\sigma = 1$

Οικονομική Βελτιστοποίηση Παραγωγής

- Γενικά οι άγνωστοι της απόφασης του παραγωγού είναι η ποσότητα παραγωγής q, η τιμή πώλησης p και οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής x τις οποίες θα αγοράσει στις δεδομένες τους τιμές r.
- Η παραγωγή συνδέεται με τις ποσότητες των συντελεστών παραγωγής μέσω της αποτελεσματικής τεχνολογίας, δηλαδή της συνάρτησης παραγωγής.
- Γενικά, η ποσότητα παραγωγής και η τιμή πώλησης συνδέονται μεταξύ τους στο πλαίσιο της αγοράς: ορίζοντας μια τιμή πώλησης (price maker) η αγορά προσδιορίζει ποια ποσότητα μπορεί να απορροφήσει, και αντίθετα, ορίζοντας την ποσότητα παραγωγής η αγορά προσδιορίζει σε ποια τιμή είναι διατεθειμένη να απορροφήσει την πωλούμενη ποσότητα. Άρα η τιμή και η ποσότητα πώλησης δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Στο πλαίσιο του ελεύθερου και τέλειου ανταγωνισμού, ο παραγωγός είναι πολύ μικρός έναντι της αγοράς και δεν μπορεί να ορίσει την τιμή πώλησης, παρά να τη λάβει ως δεδομένη έτσι όπως προκύπτει από την αγορά (price taker). Επίσης όντας πολύ μικρός, ο παραγωγός το πρόβλημα απόφασης που του απομένει είναι να παράγει στο βέλτιστο κόστος τη δεδομένη ποσότητα παραγωγής την οποία η αγορά είναι διατεθειμένη να απορροφήσει από αυτόν στη δεδομένη τιμή της αγοράς.

Πρόβλημα (1) $\left| \begin{array}{ll} Min & C = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \\ s.t. & f(x_1, x_2) \geq q \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Άγνωστοι } x_1, x_2 \\ \text{Δεδομένα } q, r_1, r_2 \end{array}$

Λόγω συνέχειας και των φθινουσών οριακών παραγωγικοτήτων της f στο βέλτιστο η ανισότητα ικανοποιείται με ισότητα. Άρα Langrangian :

$$Min \quad \Im = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b + \mu\left(q - f(x_1, x_2)\right) \text{ όπου } \mu \text{ το Οριακό Κόστος } \mu = \frac{dC}{dq}.$$

Πρόβλημα (2) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = r_1 - \mu \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = r_2 - \mu \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \mu} = q - f(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{MP_1}{MP_2} = RTS \\ \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{MP_1}{r_1} = \dfrac{MP_2}{r_2} \end{array} \right.$

Από το (2) ορίζεται η Συνάρτηση Ζήτησης Συντελεστών Παραγωγής

$x_1 = h(q; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 0 στις τιμές των συντελεστών

Από το (1) ορίζεται η Συνάρτηση Κόστους

$C = \Phi(q; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 1 στις τιμές των συντελεστών

και η Συνάρτηση Οριακού Κόστους

$\mu = {}^{\partial \Phi}\!/_{\partial q} = \Theta(q; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 0 στις τιμές των συντελεστών

Λήμμα του Shephard ${}^{\partial \Phi}\!/_{\partial r_1} = x_1 \qquad {}^{\partial \Phi}\!/_{\partial r_2} = x_2$

Πρόβλημα (3) $\left| \begin{array}{ll} Max & q = f(x_1, x_2) \\ s.t. & r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \le C \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Άγνωστοι } x_1, x_2 \\ \text{Δεδομένα } C, r_1, r_2 \end{array}$

Λόγω συνέχειας και των φθινουσών οριακών παραγωγικοτήτων της f στο βέλτιστο η ανισότητα ικανοποιείται με ισότητα. Άρα Langrangian :

$$Max \quad \Im = f(x_1, x_2) + \lambda(C - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b) \text{ όπου } \lambda \text{ Οριακή Απόδοση } \lambda = \frac{dq}{dC}.$$

Πρόβλημα (4) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda r_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda r_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \lambda} = C - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{MP_1}{MP_2} = RTS \\ \lambda = \dfrac{MP_1}{r_1} = \dfrac{MP_2}{r_2} = \dfrac{1}{\mu} \end{array} \right.$

Από το (4) ορίζεται η Συνάρτηση Ζήτησης Συντελεστών Παραγωγής

$x_1 = g(C; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 0 στις τιμές και τη δαπάνη

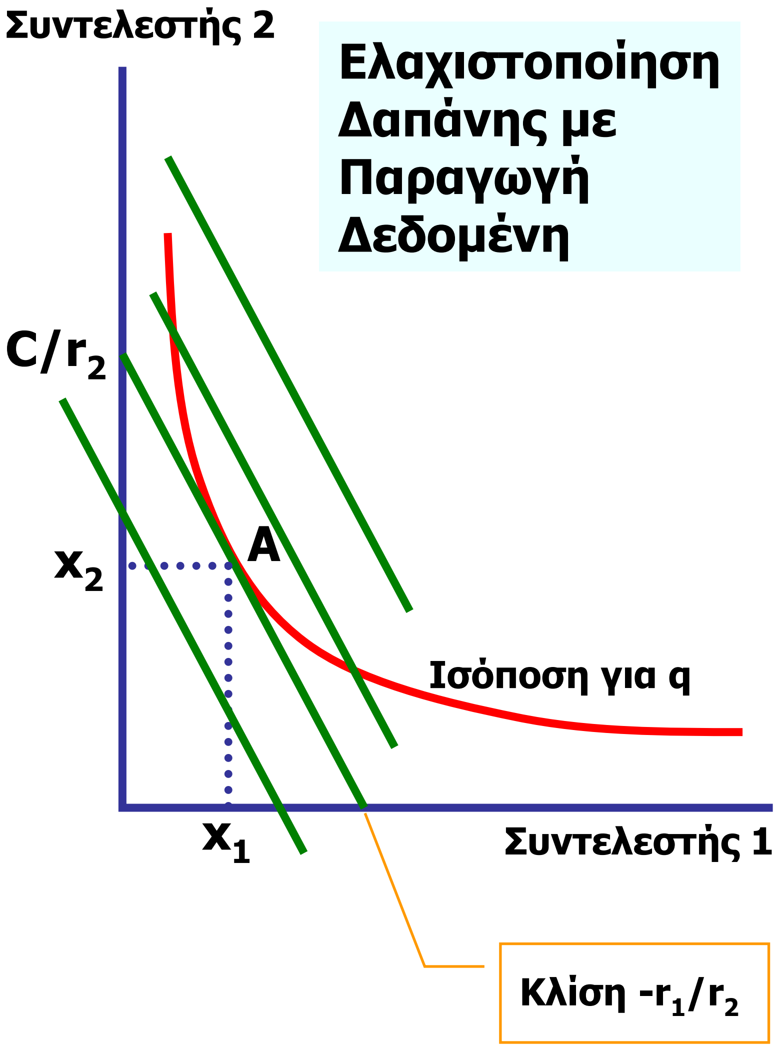
Από το (3) ορίζεται η Έμμεση Συνάρτηση Παραγωγής

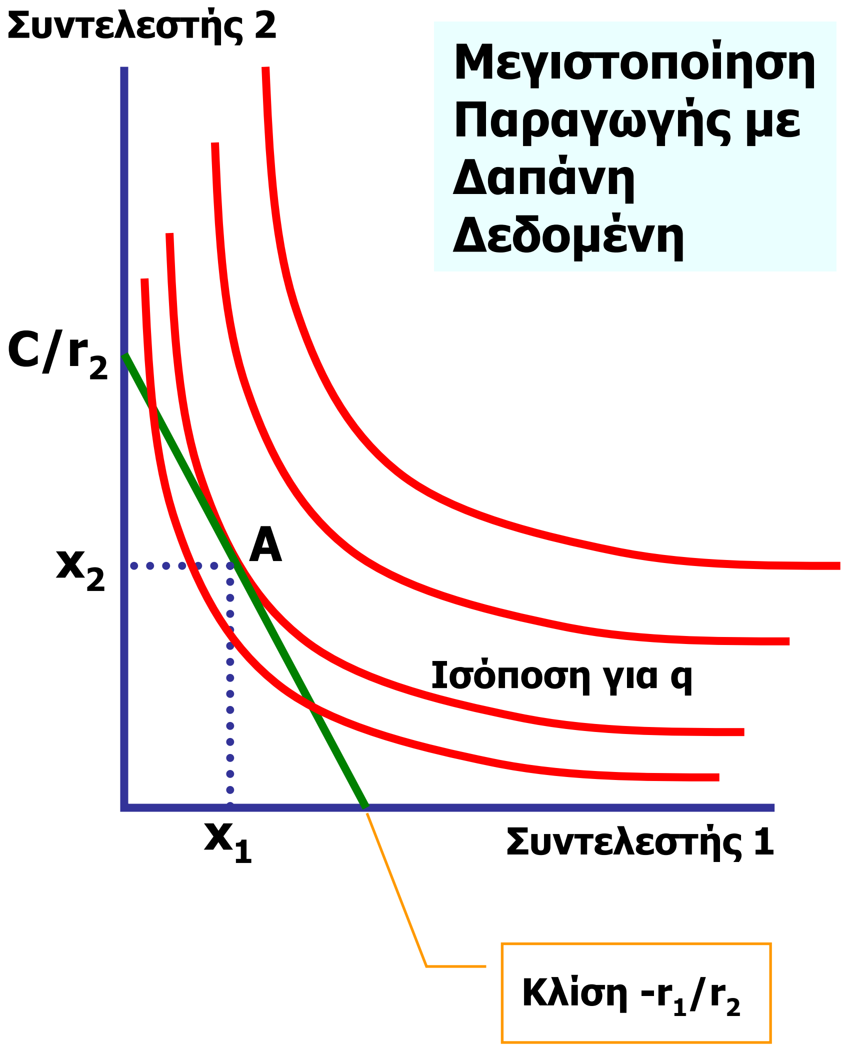
$q = \Psi(C; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 0 στις τιμές και τη δαπάνη

και η Συνάρτηση Οριακής Απόδοσης της Δαπάνης

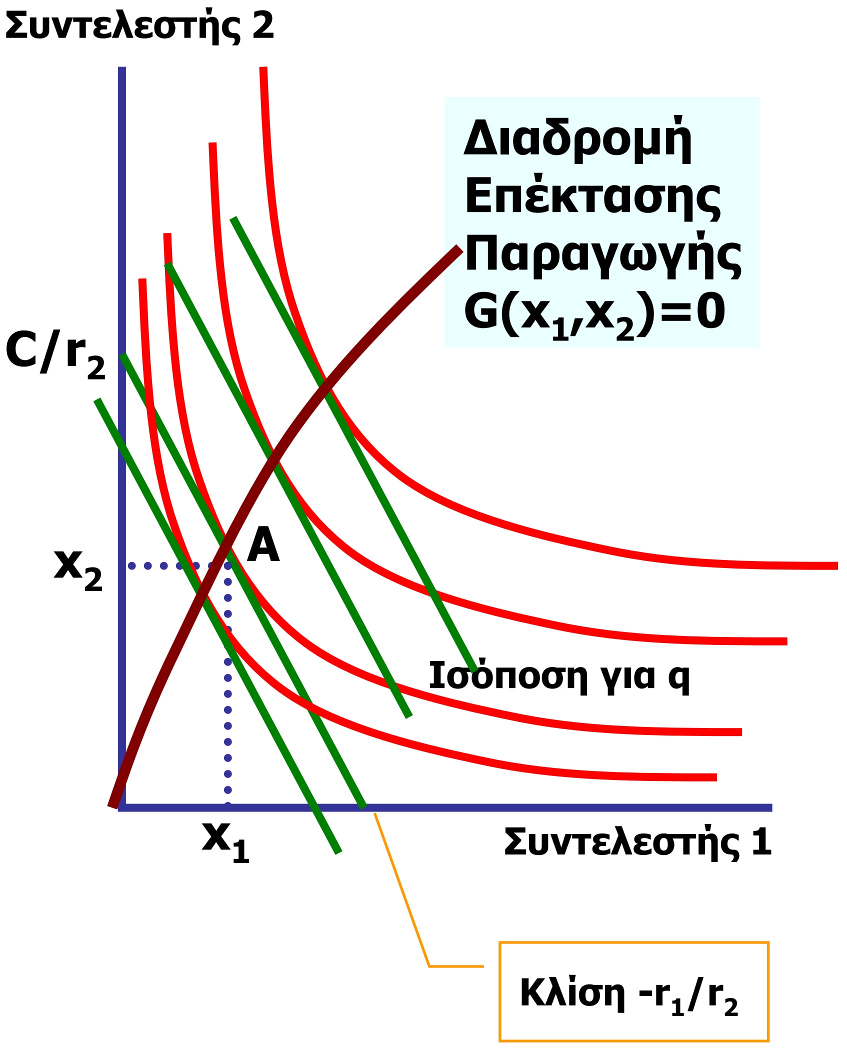
$$\lambda = \partial\Psi / \partial C = \Xi(C; r_1, r_2) = \frac{1}{\Theta(q; r_1, r_2)}$$

Οικονομική Βελτιστοποίηση Παραγωγής





Επέκταση Παραγωγής



Βελτιστοποίηση Κέρδους

Κέρδος $\pi = \text{Έσοδα - Κόστος} = p \cdot q - C = pf(x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b$

Μεγιστοποίηση Κέρδους

$$Max\,\pi \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - r_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - r_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = \dfrac{MP_1}{MP_2} = RTS \\ p = \dfrac{r_1}{MP_1} = \dfrac{r_2}{MP_2} = \mu \quad \text{το Οριακό Κόστος} \end{array} \right.$$

Συνάρτηση Ζήτησης Συντελεστών $x_1 = h(p; r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 0 στις τιμές p, r_1, r_2

$$\text{ενώ } MP_1 = \frac{r_1}{p} \text{ και } MP_2 = \frac{r_2}{p}$$

Συνάρτηση Κέρδους $\pi = \Pi(p, r_1, r_2)$ ομογενής βαθμού 1 στις τιμές p, r_1, r_2

Λήμμα του Hotelling $\dfrac{\partial \Pi}{\partial p} = f(x_1, x_2) = S(p; r_1, r_2)$ η συνάρτηση προσφοράς

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1} = -x_1 = -h(p; r_1, r_2) \text{ η συνάρτηση ζήτησης συντελεστή}$$

Συνάρτηση Κόστους

- Συνάρτηση βέλτιστου κόστους με δεδομένα την ποσότητα παραγωγής q και τις τιμές των συντελεστών παραγωγής r

$$C=\Phi(q)+b$$

Φ(q) το μεταβλητό κόστος και b το σταθερό κόστος

- Η συνάρτηση κόστους είναι
  - Μη φθίνουσα ως προς την ποσότητα παραγωγής
  - Πέραν κάποιου επιπέδου παραγωγής (κλίμακα παραγωγής) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω
  - Από την αρχή έως το σημείο καμπής έχουμε αύξουσες οικονομίας κλίμακας, μετά το σημείο καμπής έχουμε φθίνουσες οικονομίες κλίμακας

Συνάρτηση Κόστους

ATC Μέσο συνολικό κόστος (average total cost)

AVC Μέσο μεταβλητό κόστος (average variable cost)

AFC Μέσο σταθερό κόστος (average fixed cost)

$$ATC = \frac{\Phi(q) + b}{q}$$

$$AVC = \frac{\Phi(q)}{q}$$

$$AFC = \frac{b}{q}$$

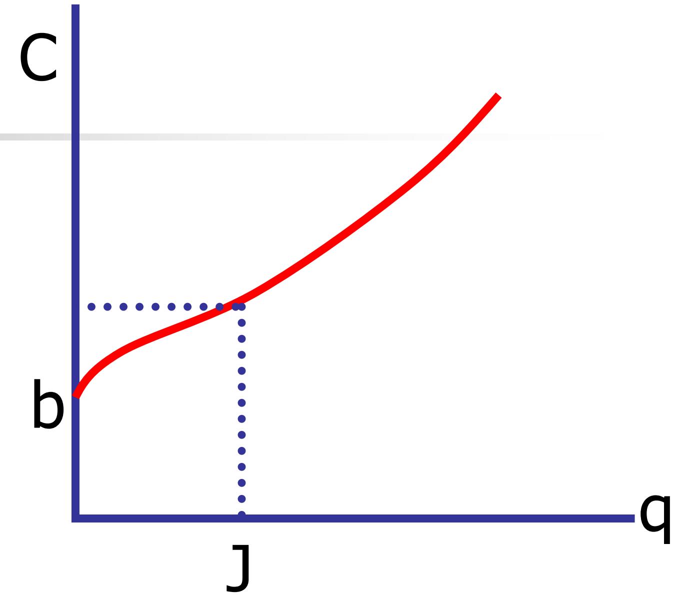
Οριακό Κόστος

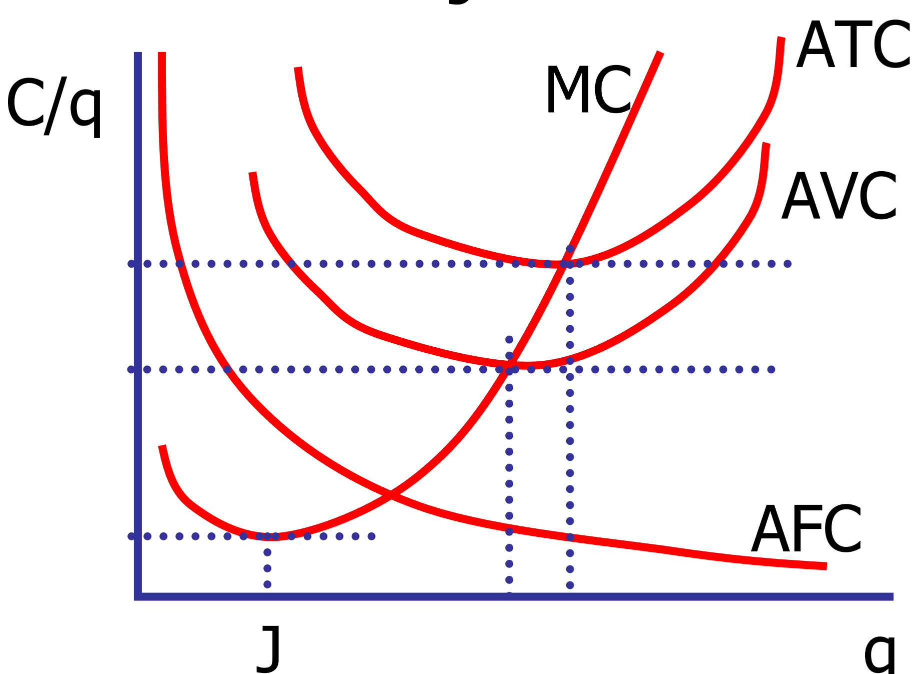
$$MC = \frac{dC}{dq} = \Phi'(q)$$

$$\text{Min } ATC \text{ όταν } \frac{\partial ATC}{\partial q} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q \cdot \Phi' - (\Phi + b)}{q^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi' = \frac{\Phi + b}{q} \Rightarrow MC = AC$$

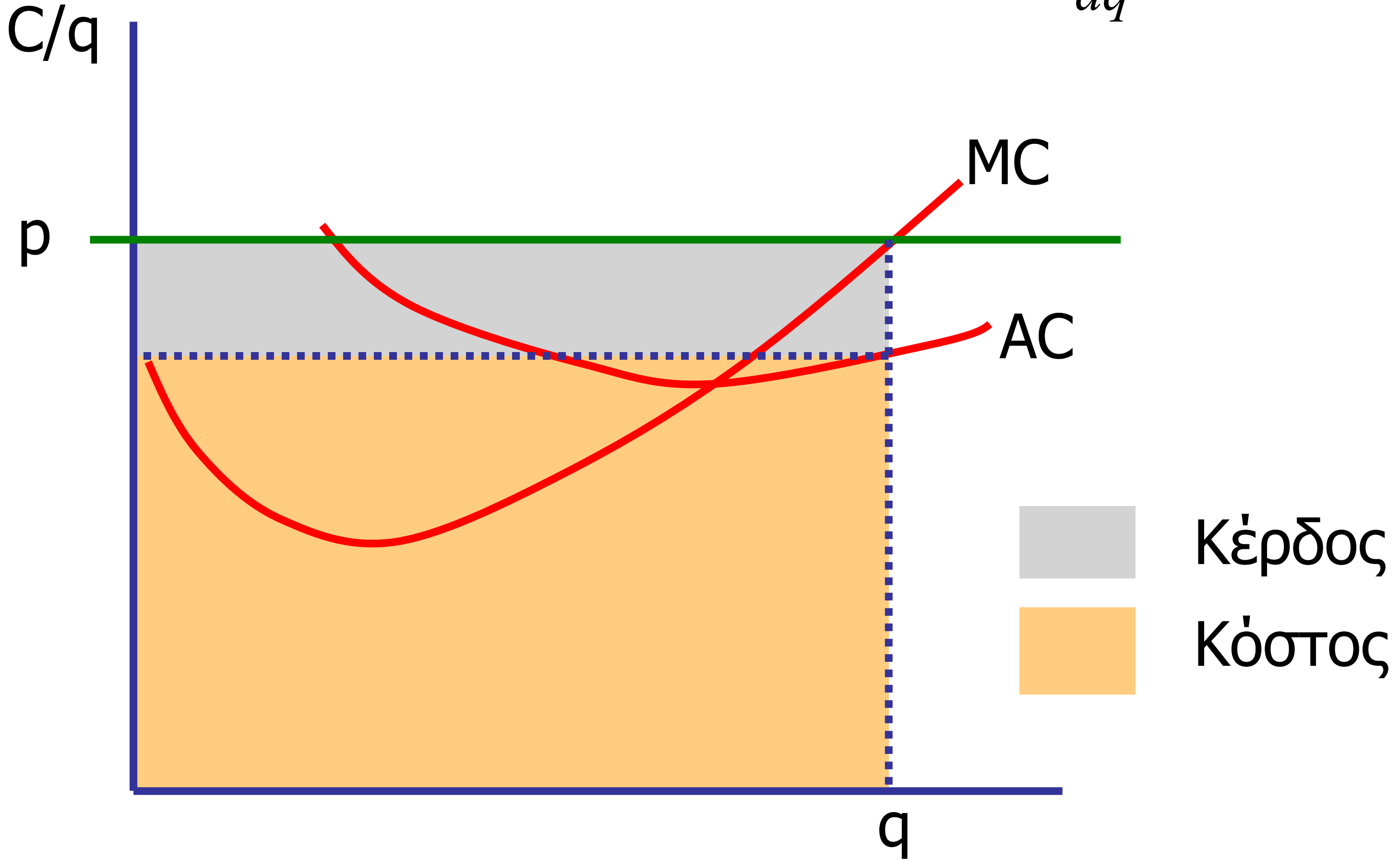




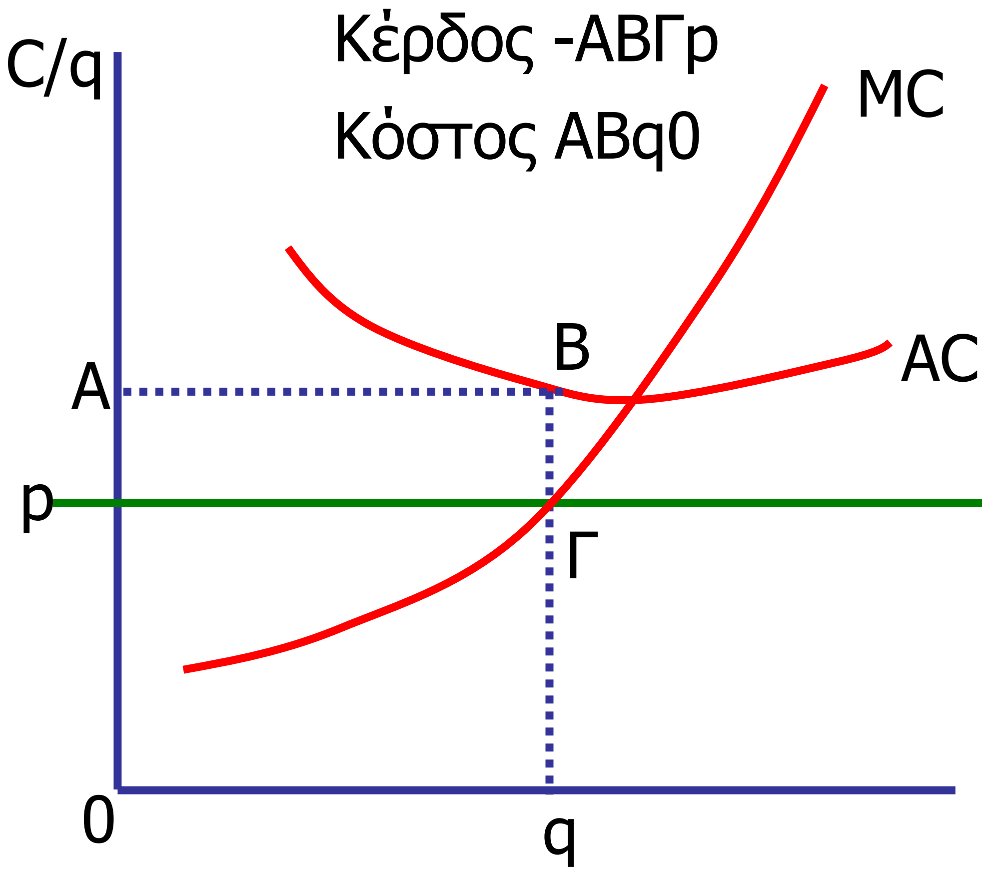
Μεγιστοποίηση Κέρδους και Παραγωγή

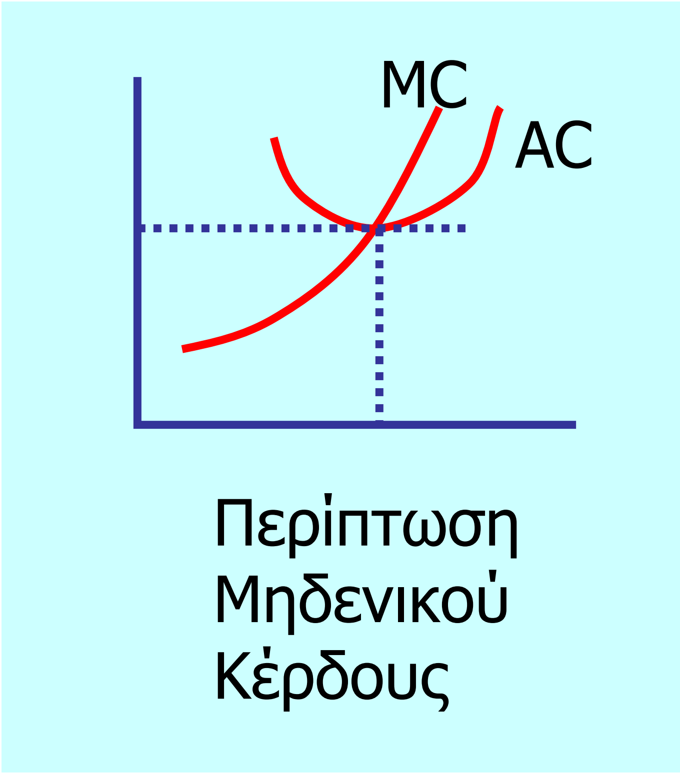
$$Max \quad \pi = pq - \Phi(q)$$

$$\Rightarrow \frac{d\pi}{dq} = 0 \Rightarrow p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = MC$$



Μεγιστοποίηση Κέρδους και Παραγωγή

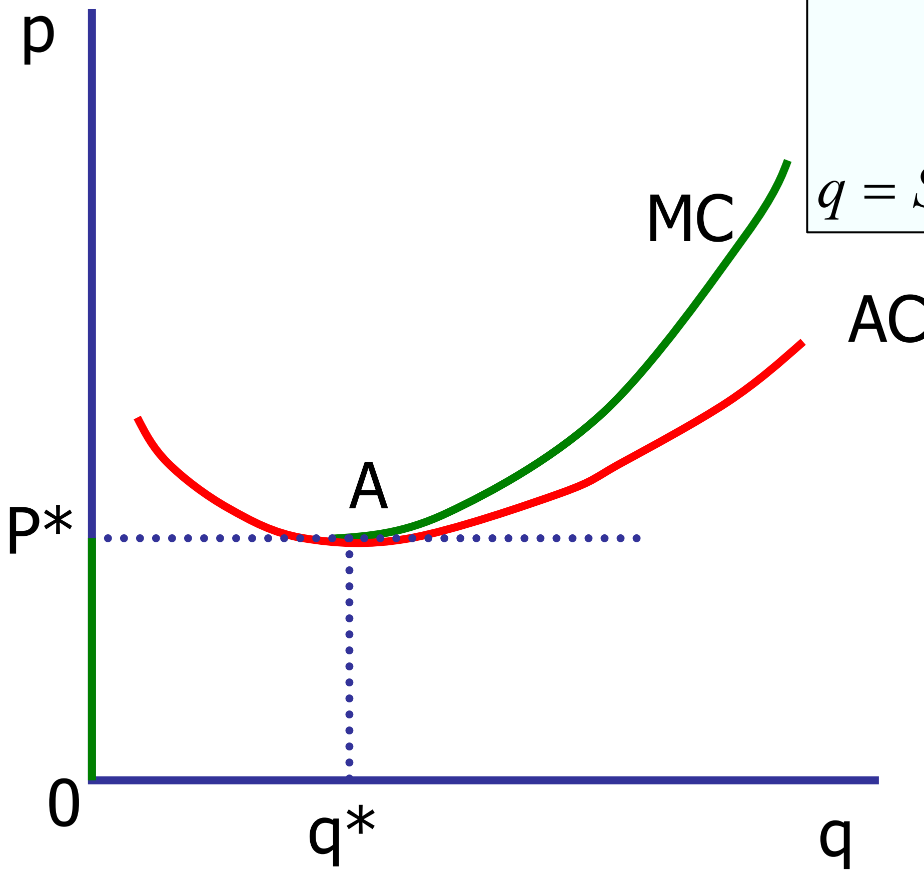




Συνάρτηση Προσφοράς

$$p = S^{-1}(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } p < Min\dfrac{\Phi(q)}{q} \\ \dfrac{d\Phi(q)}{dq} & \text{αν } p \geq Min\dfrac{\Phi(q)}{q} \end{cases}$$

$$q = S(p) \qquad \text{αύξουσα συνάρτηση}$$

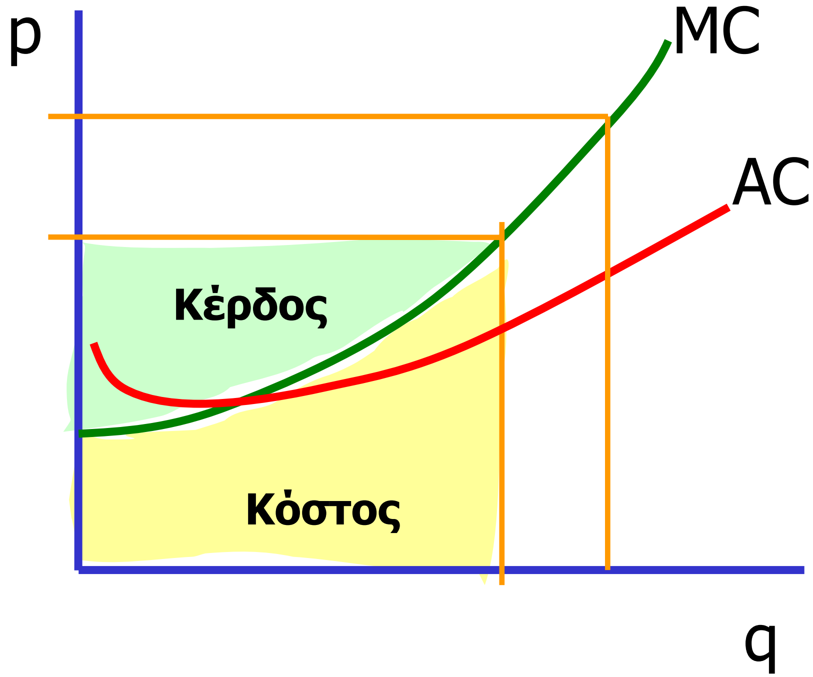


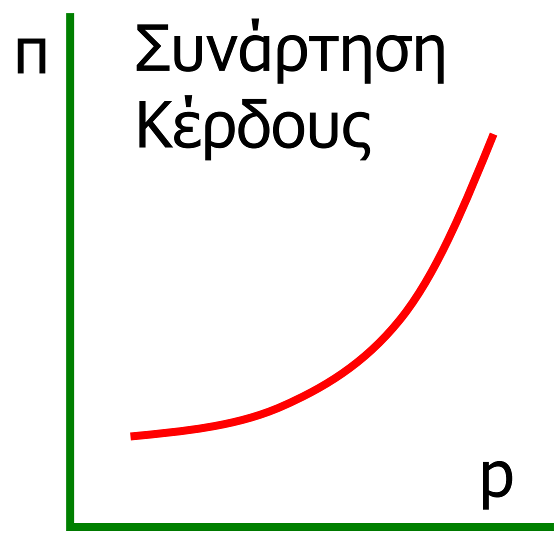
Καμπύλη Προσφοράς
Προϊόντος
Συναρτήσει της τιμής του

Op*A_MC

Συνάρτηση Προσφοράς και Κέρδος

- **Τόσο η συνάρτηση προσφοράς όσο και η συνάρτηση κέρδους είναι αύξουσες ως προς την τιμή πώλησης του προϊόντος**
- **Αυτό οφείλεται στην ισότητα τιμής πώλησης και οριακού κόστους (όταν η τιμή είναι δεδομένη), μια που το οριακό κόστος είναι αύξων για ποσότητα παραγωγής πέραν του σημείου στο οποίο ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος**





Ζήτηση για Συντελεστές Παραγωγής

Ποσότητες συντελεστών παραγωγής $x = (x_i, i = 1,\dots,N)$

Τιμές συντελεστών παραγωγής $r = (r_i, i = 1,\dots,N)$

Ποσότητα παραγωγής q Τιμή Πώλησης προϊόντος p

Συνάρτηση Ζήτησης $x = h(q,r) = \arg Min_x \{rx,\ x \in [(q = f(x))]\}$

Συνάρτηση Κόστους $C = \Phi(q,r) = rh(q,r)$ και $p = \partial\Phi / \partial q$ και $\partial\Phi / \partial r = h(q,r)$

Ιδιότητες : Αρνητική Κλίση $\partial h_i(q,r) / \partial r_i \le 0$

Συμμετρία $\partial h_i(q,r) / \partial r_j = \partial h_j(q,r) / \partial r_i$

Ομογένεια βαθμού 0 $h(q,\lambda r) = h(q,r), \forall \lambda > 0$

Ελαστικότητα Ζήτησης Συντελεστή Παραγωγής ως προς ίδια τιμή $\varepsilon_{ii} = \dfrac{\partial h_i(q,r) / h_i(q,r)}{\partial r_i / r_i}$

Σταυροειδής Ελαστικότητα Ζήτησης Συντελεστή Παραγωγής $\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial h_i(q,r) / h_i(q,r)}{\partial r_j / r_j}$

Ελαστικότητες Συντελεστών Παραγωγής

Ασυμετρία των σταυροειδών ελαστικοτήτων ζήτησης συντελεστών παραγωγής

$\varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{ji}$ $\qquad \dfrac{\varepsilon_{ij}}{s_j} = \dfrac{\varepsilon_{ji}}{s_i}$ όπου $s_i = \dfrac{r_i h_i(q,r)}{\sum_j r_j h_j(q,r)}$ το μερίδιο του i στη δαπάνη

Επίσης $\dfrac{\varepsilon_{ij}}{s_j} = \sigma_{ij}$ η ελαστικότητα υποκατάστασης, άρα $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Από την ομογένεια βαθμού 0 στις τιμές των συντελεστών, προκύπτει $\sum_j \varepsilon_{ij} = 0$

Για τον ίδο λόγο προκύπτει $\sum_j r_j \dfrac{\partial h_i(q,r)}{\partial r_j} = \sum_j r_j \dfrac{\partial^2 \Phi(q,r)}{\partial r_i \partial r_j} = 0 \quad \forall i$

Επίσης ο Πίνακας $\left[\dfrac{\partial^2 \Phi(q,r)}{\partial r_i \partial r_j}, \forall i \forall j \right]$ άρα και ο Πίνακας $\left[\sigma_{ij} \forall i \forall j \right]$ είναι συμμετρικός

και έχει μέτρο αρνητικό δηλαδή $[r]' \left[\sigma_{ij} \forall i \forall j \right] [r] \leq 0$

Ελαστικότητα συντελεστή ως προς την Παραγωγή

Ελαστικότητα ως προς την ποσότητα παραγωγής $\omega_i = \dfrac{\partial h_i(q,r) \big/ h_i(q,r)}{\partial q \big/ q}$

Αν $\omega_i \geq 0$ ο συντελεστής *i* κανονικό αγαθό, αλλιώς υποδεέστερο (σπάνια)

Θεωρώντας τη μεγιστοποίηση κέρδους $Max_x \, \pi = pf(x_i \forall i) - \sum_i r_i x_i$ και αν p δεδομένη

προκύπτει $x_i = h_i(p, r_i \forall i) = h_i(q, r_i \forall i)$ αφού $p = S^{-1}(q, r_i \forall i) = \partial \Phi(q, r_i \forall i) \big/ \partial q = MC$

Στο βέλτιστο ισχύει $pMP_i = r_i$ δηλαδή επιλέγεται η ποσότητα του συντελεστή παραγωγής μέχρι του επιπέδου στο οποίο η αξία της οριακής του παραγωγικότητας ισούται με την τιμή αγοράς του συντελεστή αυτού. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το οριακό κέρδος ως προς την τιμή πώλησης ισούται με τη συνάρτηση προσφοράς (Hotelling) :

$\dfrac{\partial \pi}{\partial p} = S(p, r_i \forall i)$ και ισχύει επίσης $\dfrac{\partial \pi}{\partial r_i} = -h_i(p, r_i \forall i) = -\dfrac{\partial \Phi(q, r_i \forall i)}{\partial r_i}$ αν p δεδομένη

Έτσι συνδέεται το λήμμα του *Hotelling* με το λήμμα του *Shephard*

Σχέση Slutsky για συντελεστές παραγωγής

Αν μεταβληθεί η τιμή κάποιου συντελεστή παραγωγής, η επίπτωση στη ζήτηση συντελεστή παραγωγής διαχωρίζεται σε επίπτωση που οφείλεται σε υποκατάσταση μεταξύ συντελεστών για δεδομένη ποσότητα παραγωγής (πρώτος όρος) και σε επίπτωση που οφείλεται σε αναγκαστική μεταβολή της ποσότητας παραγωγής (δεύτερος όρος) που οφείλεται στην αρχική μεταβολή της τιμής του συντελεστή επειδή αυτή μεταβάλλει το οριακό κόστος άρα και στο επίπεδο παραγωγής δεδομένης της ισότητας μεταξύ τιμής πώλησης και του οριακού κόστους :

$$\frac{\partial h_i(p, r_i \forall i)}{\partial r_j} = \left.\frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial r_j}\right|_{y\ cons\tan t} + \frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial r_j} =$$

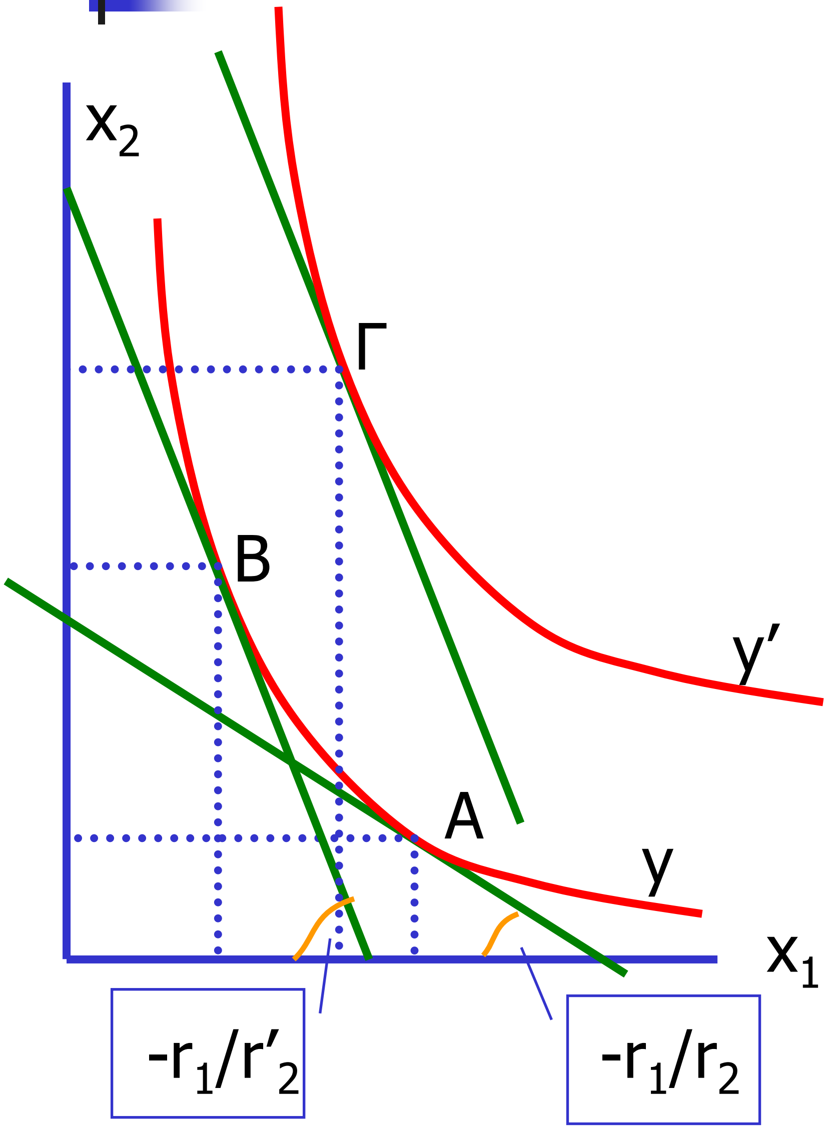
$$= \left.\frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial r_j}\right|_{q\ cons\tan t} - \frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(q, r_i \forall i)}{\partial q \partial r_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial r_j}\right|_{y\ cons\tan t} - \frac{\partial x_i}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial MC}{\partial r_j}$$

Ομοίως

$$\frac{\partial h_i(p, r_i \forall i)}{\partial r_j} = \left.\frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial r_j}\right|_{y\ cons\tan t} - \frac{\frac{\partial h_i(q, r_i \forall i)}{\partial p} \cdot \frac{\partial h_j(q, r_i \forall i)}{\partial p}}{\frac{\partial q}{\partial p}}$$

Σχέση Slutsky για συντελεστές παραγωγής



- Αρχικό σημείο το Α, όπου λόγω της κλίσης r_1/r_2 οι βέλτιστες ποσότητες συντελεστών είναι x_{1A} και x_{2A}.
- Μειώνεται η τιμή αγοράς του συντελεστή 2 σε r'_2 οπότε αν μπορούσε να διατηρηθεί το επίπεδο παραγωγής αμετάβλητο σε ποσότητα y, το νέο βέλτιστο θα ήταν το σημείο Β στο οποίο οι ποσότητες είναι x_{1B} και x_{2B} με $x_{1B}<x_{1A}$ και $x_{2B}>x_{2B}$
- Όμως η μείωση της τιμής του 2 επιφέρει μείωση του οριακού κόστους, άρα επειδή το επίπεδο παραγωγής ορίζεται από την ισότητα της τιμής πώλησης με το οριακό κόστος, το νέο επίπεδο παραγωγής είναι μεγαλύτερο, έστω y′
- Νέο βέλτιστο το σημείο Γ στο οποίο σίγουρα $x_{2Γ}>x_{2A}$ αλλά είναι απροσδιόριστο αν $x_{1Γ}>x_{1A}$ ή το αντίθετο

Γραμμές ίσου κέρδους

Θεωρώντας τη μεγιστοποίηση κέρδους

$$Max_x\ \pi = pf\left(x_i \forall i\right) - \sum_i r_i x_i \text{ και αν } p \text{ δεδομένη}$$

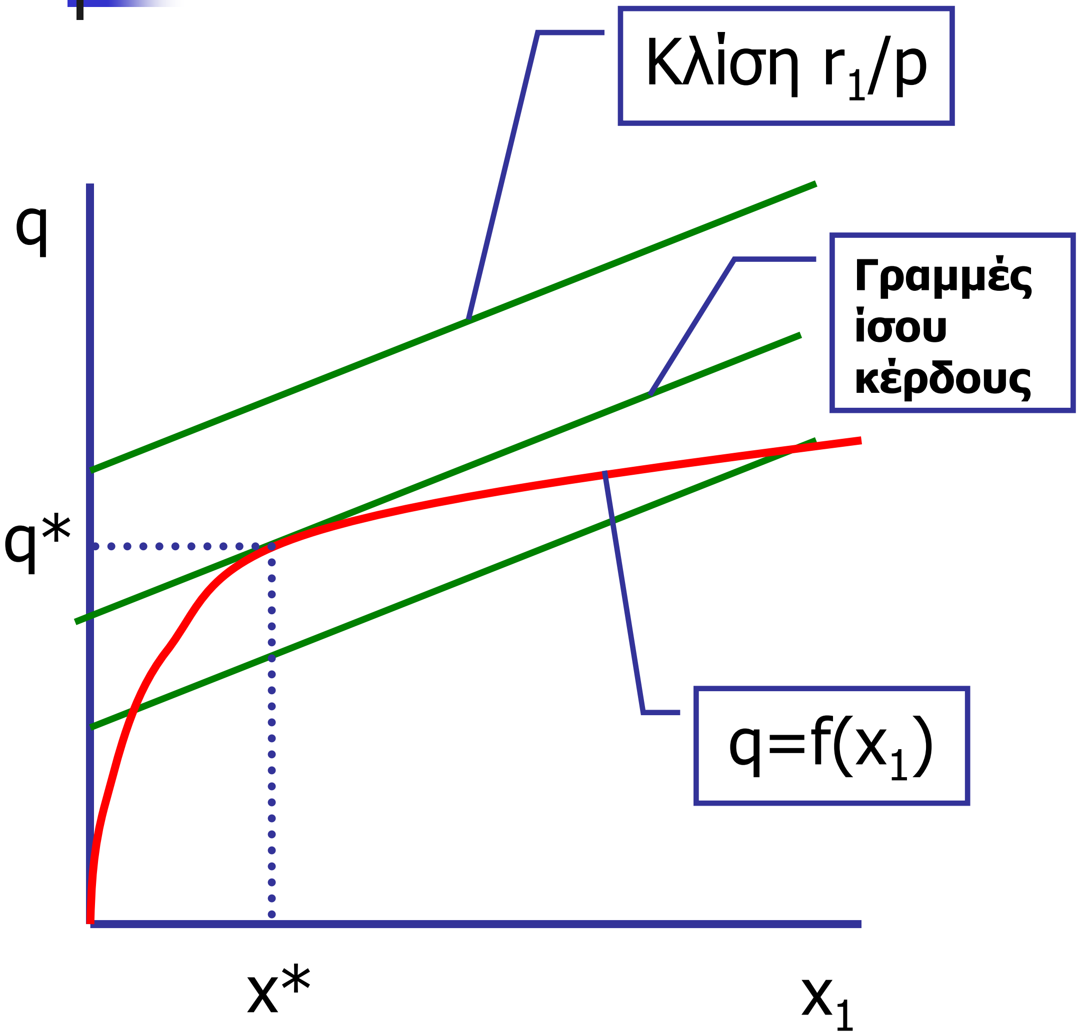
εξετάζουμε τη μεταβολή της παραγωγής q ως συνάρτηση της ποσότητας του συντελεστή 1 των ποσοτήτων των άλλων συντελεστών σταθερών. Άρα

$$q = \frac{\pi}{p} + \sum_{i \neq 1} \frac{r_i}{p} x_i + \frac{r_1}{p} x_1$$

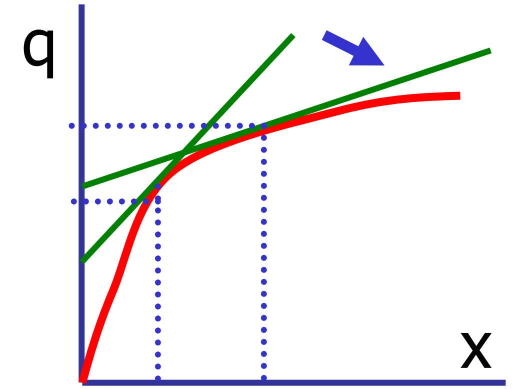
η οποία ορίζει γραμμές ίσου κέρδους με κλίση θετική $\frac{r_1}{p}$

Διατηρουμένων σταθερών των ποσοτήτων $x_2, \ldots, x_N$ η συνάρτηση παραγωγής $q = f\left(x_1\right)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω επειδή η οριακή παραγωγικότητα φθίνει. Έτσι, για να μεγιστοποιήσει το κέρδος, ο παραγωγός επιλέγει την βέλτιστη ποσότητα του συντελεστή παραγωγής 1 και την βέλτιστη ποσότητα παραγωγής στο σημείο όπου κάποια γραμμή ίσου κέρδους είναι εφαπτομένη της συνάρτησης παραγωγής, γιατί στο σημείο αυτό $\frac{r_1}{p} = \frac{\partial f\left(x_1\right)}{\partial x_1} = MP_1$ που είναι η γνωστή συνθήκη βελτίστου.

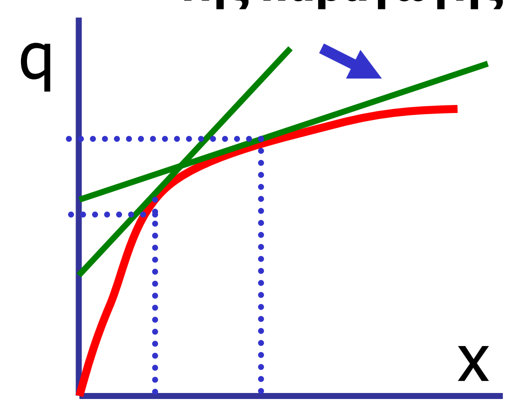
Γραμμές ίσου κέρδους



Μείωση τιμής συντελεστή



Αύξηση τιμής πώλησης της παραγωγής



Συναρτήσεις Μακροχρόνιου Κόστους

- Στη συνάρτηση βραχυχρόνιου κόστους ο Παραγωγός δεν μπορεί να μεταβάλλει το σταθερό-πάγιο μέρος του κόστους, και το οποίο δεν εξαρτάται από το επίπεδο παραγωγής. Π.χ. αν το σταθερό κόστος είναι το κόστος αρχικής επένδυσης, το βραχυχρόνιο κόστος υπονοεί ότι δεν υπάρχει χρόνος για αναπροσαρμογή της επένδυσης ώστε να μπορεί να εξυπηρετεί τυχόν επιθυμητή μεγέθυνση του επιπέδου παραγωγής
- Στη συνάρτηση μακροχρόνιου κόστους ο Παραγωγός έχει χρόνο να μεταβάλει το σταθερό-πάγιο μέρος του κόστους ώστε να το προσαρμόσει ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο παραγωγής. Π.χ. αν το σταθερό κόστος είναι η επένδυση, το μακροχρόνιο κόστος υπονοεί ότι ο Παραγωγός έχει χρόνο να επενδύσει περισσότερο ώστε να εξυπηρετήσει τυχόν μεγέθυνση του επιπέδου παραγωγής.

Μακροχρόνια Συνάρτηση Κόστους

Έστω k νέα άγνωστη μεταβλητή που παριστά π.χ. το "μέγεθος του εργοστασίου" η k εξαρτάται από το εκάστοτε επίπεδο παραγωγής και για την επίτευξή του εκάστοτε μεγέθους k απαιτείται δαπάνη $\Psi(k)$. Άρα η απόφαση του παραγωγού :

$$\left| \begin{array}{ll} Min_{x,k} & C = \sum_i r_i x_i + \Psi(k) \\ s.t. & f(x_i \forall i \; ; \; k) = q \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \partial \Im / \partial x_i = r_i - \lambda \, \partial f / \partial x_i = 0 \\ \partial \Im / \partial k = \partial \Psi / \partial k - \lambda \, \partial f / \partial k = 0 \\ \partial \Im / \partial \lambda = q - f(x_i \forall i \; ; \; k) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} MP_i = \dfrac{r_i}{\lambda} \\ MK = \dfrac{M\Psi}{\lambda} \\ \lambda = \dfrac{\partial C}{\partial q} = LTMC \end{array} \right.$$

όπου $LTMC$ το μακροχρόνιο οριακό κόστος, MK η οριακή απόδοση του μεγέθους του εργοστασίου και $M\Psi$ το οριακό κόστος επένδυσης σε μέγεθος εργοστασίου.

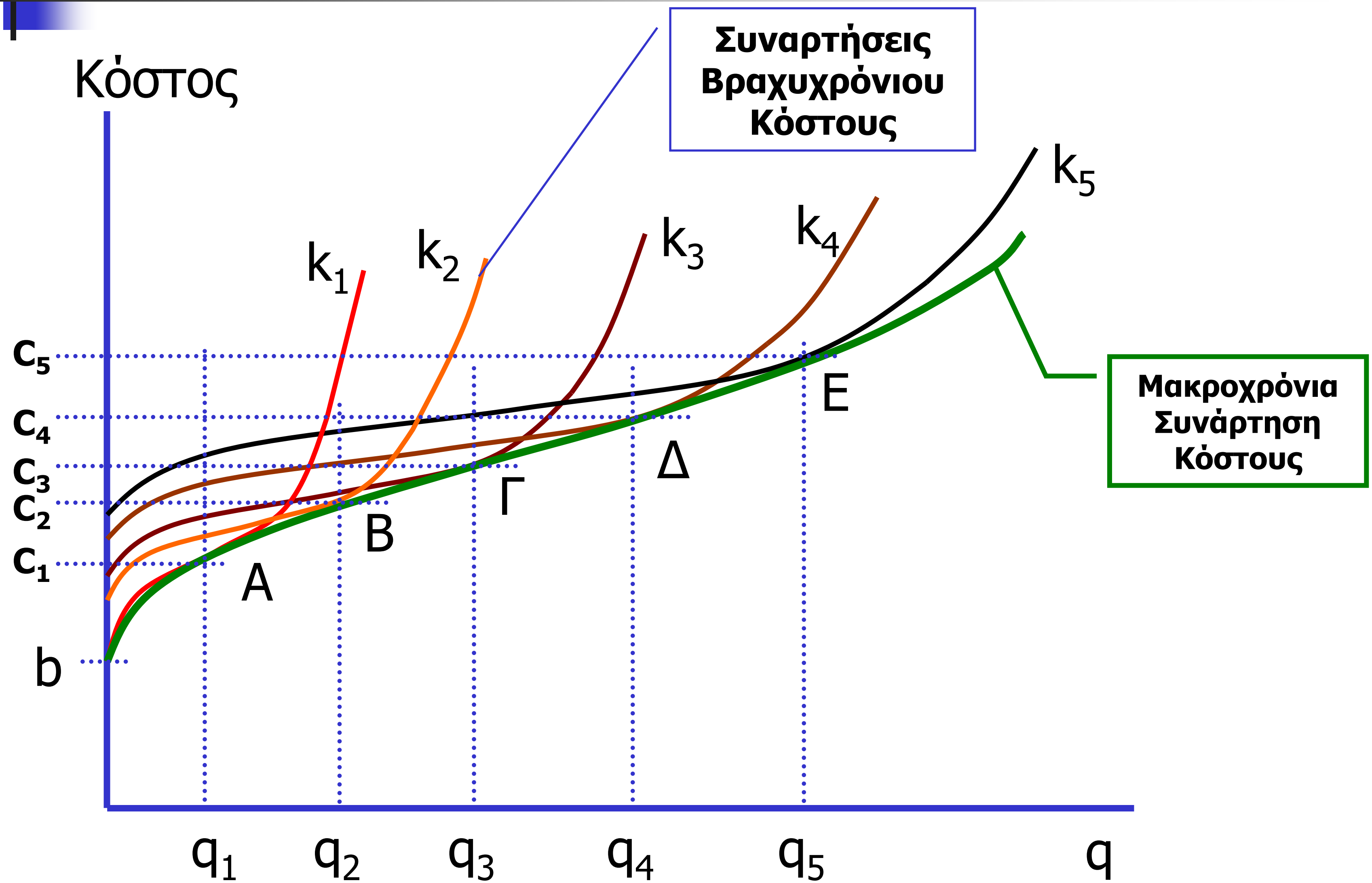
Συνάρτηση Μακροχρόνιου Κόστους

$$LTC = \sum_i r_i x_i + \Psi(k) = STC + \Psi(k) \quad \text{οπότε} \quad LTC = LT\Phi\left[\Phi(q) + \Psi(k)\right]$$

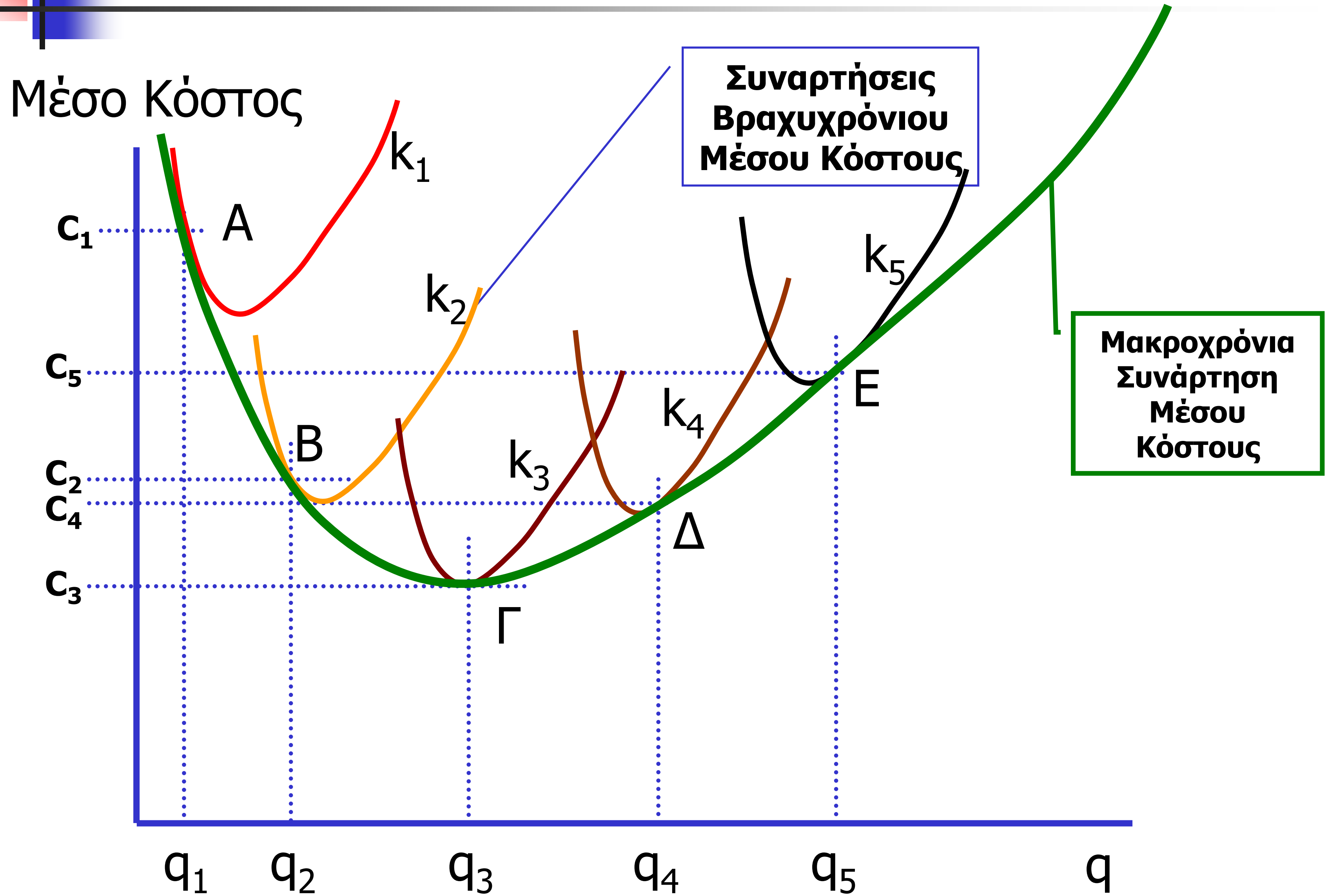
επομένως γενικότερα $LTC = LT\Phi(q, r_i \forall i)$ γιατί $k = \mathrm{K}(q, r_i \forall i)$ και επομένως

$$LTAC = LT\Phi(q)/q \qquad LTMC = \partial LT\Phi(q)/\partial q$$

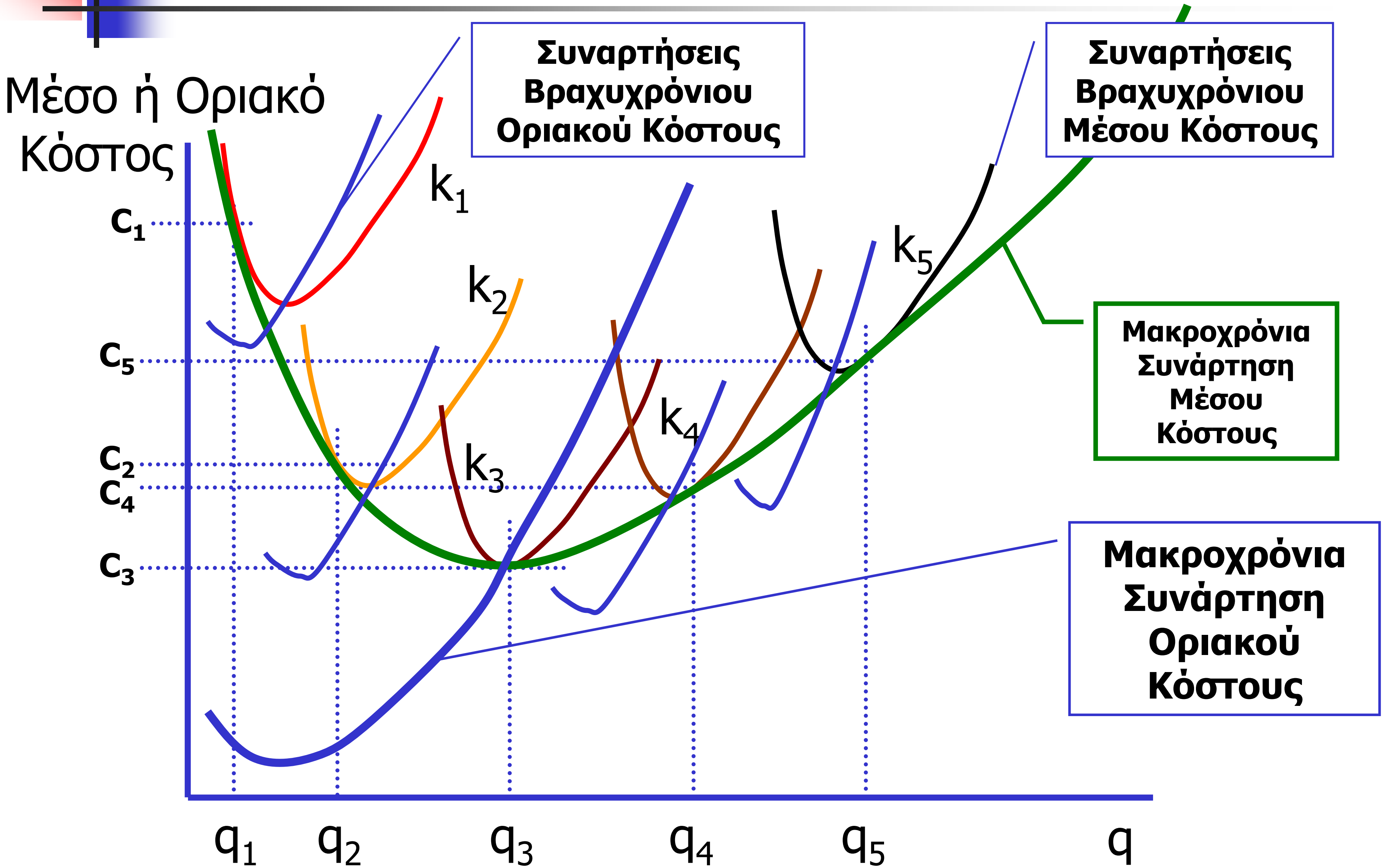
Γραφικά του μακροχρόνιου κόστους



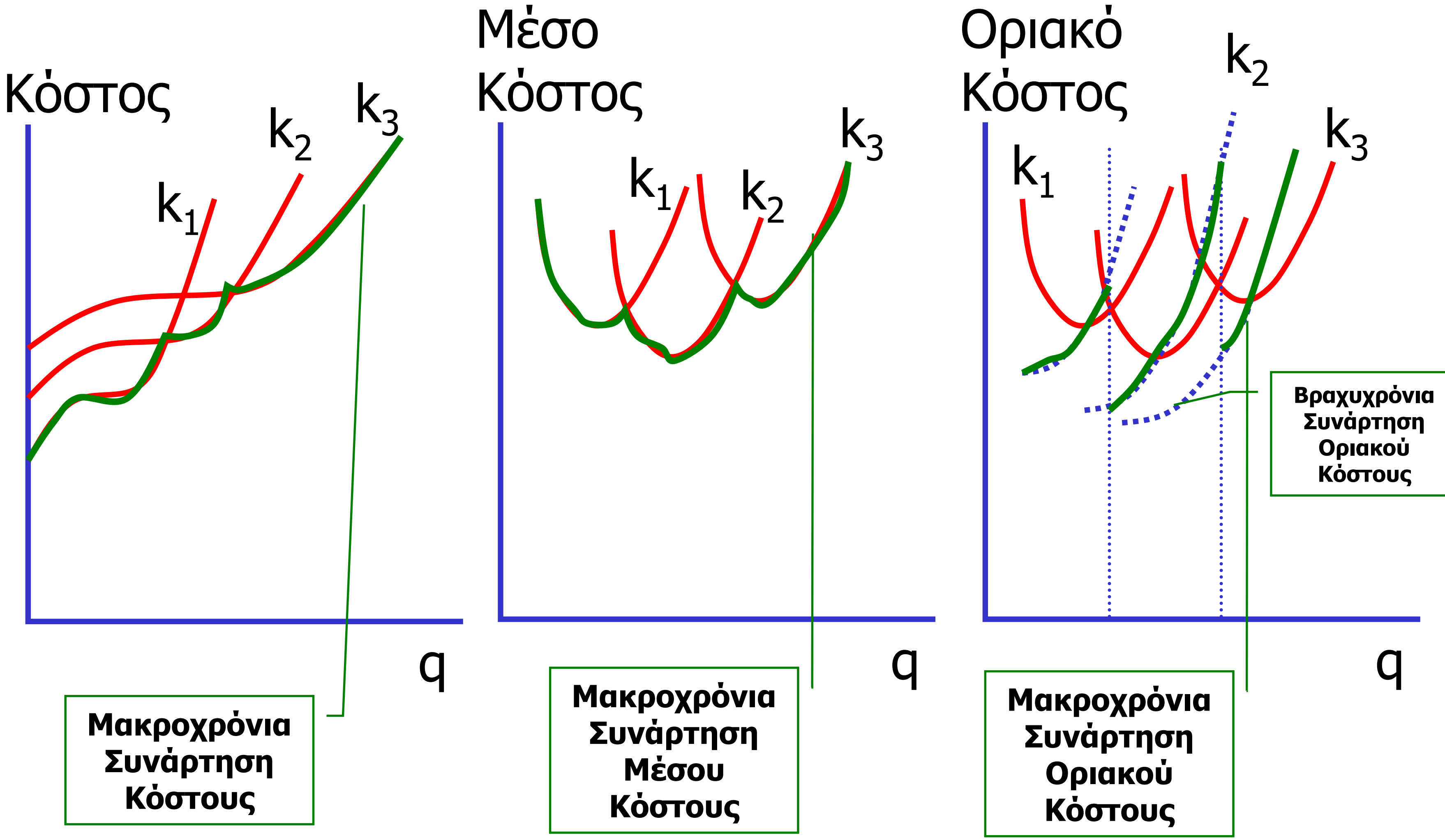
Γραφικά του μακροχρόνιου κόστους



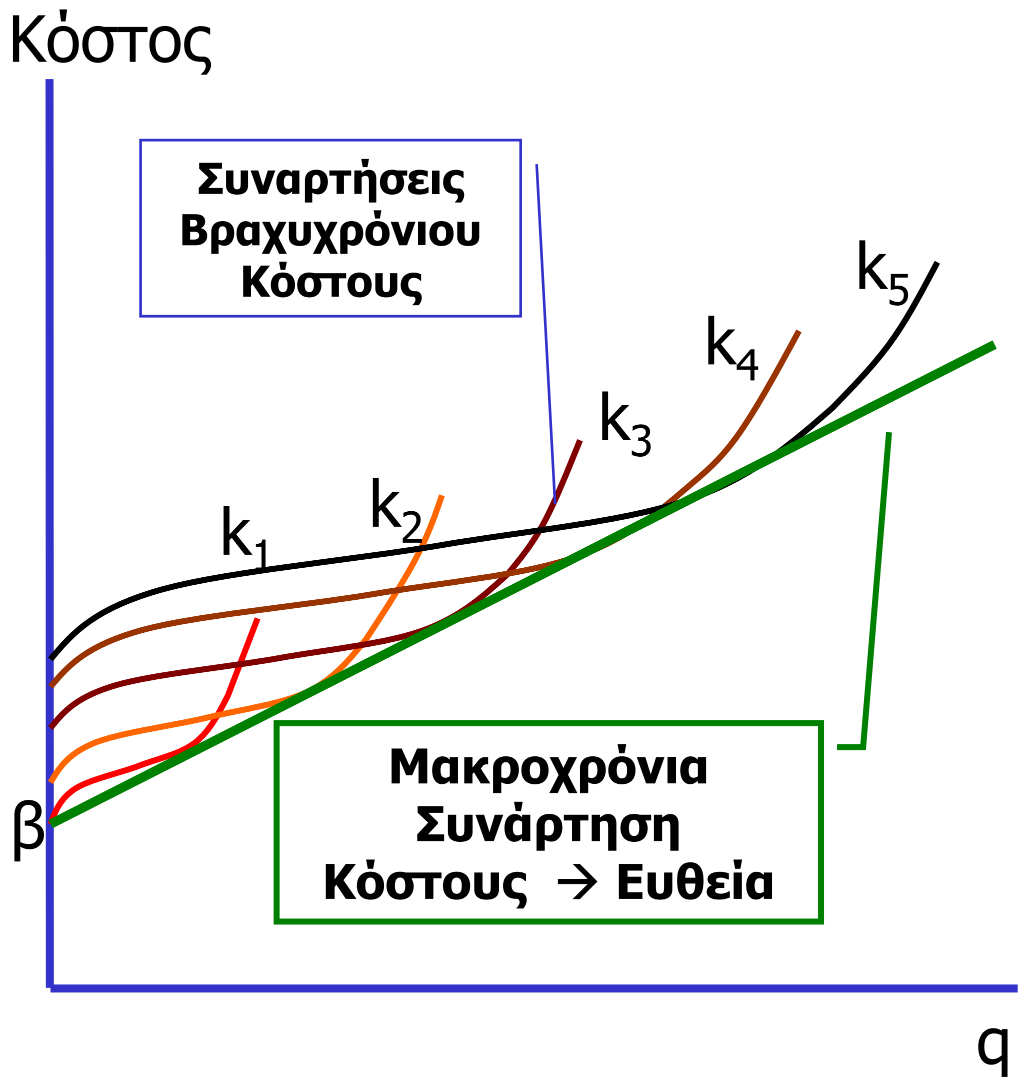
Γραφικά του μακροχρόνιου κόστους



Περίπτωση Διακριτής Τεχνολογίας



Περίπτωση Σταθερών Οικονομιών Κλίμακας Μακροχρόνια



Μακροχρόνιο Οριακό Κόστος: Σταθερό ασυμπτωτικά τείνει στο μακροχρόνιο μέσο κόστος

$$\Phi(q) = \alpha q + \beta$$

$$AC = \frac{\Phi}{q} = \alpha + \frac{\beta}{q}$$

$$MC = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \alpha$$